

清 华 大 学

# 综 合 论 文 训 练

题目：模型预测控制在模型含误差时的性能分析——基于微扰法的分析框架

系 别：交叉信息研究院

专 业：计算机科学与技术（计算机科学实验班）

姓 名：胡 扬

指 导 教 师：黄隆波 副教授（清华大学）

联合指导教师：Adam Wierman 教授（加州理工大学）

2022 年 8 月 2 日



## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名： 胡扬 导师签名： 黄隆波 日 期 2022.5.31



## 中文摘要

本文提出了一种新的基于微扰法的分析框架，它可以为含预测的动态控制器提供性能保证。这一框架包含三个互相独立的主要步骤：首先，我们需要对有限时间最优控制问题（FTOCP）证明两种微扰响应上界；随后，我们利用微扰响应上界得到次态控制误差的上界；最后，我们再将次态控制误差的上界转化为动态超额代价的上界。应用这一框架，我们就把动态控制器性能保证的导出化归到对优化问题的微扰分析。鉴于后者已经有广泛且深入的研究成果，如此我们便可以简便地在新的系统模型下证明控制器的动态超额代价上界。

为了应用这一分析框架，我们主要关注一类经典的动态控制器，即模型预测控制器（MPC）。由于模型预测控制器的特性，上述基于微扰法的分析框架可以相对统一地应用于各种系统模型，我们将其推导过程总结为微扰分析基本定理。为说明新框架的普适性，我们在一系列系统模型下给出了模型预测控制器的动态超额代价上界，这些系统模型中包含了预测误差、非线性系统和 / 或约束条件。其中，以下系统中模型预测控制器的性能保证结果是首次见于文献：① 非线性时变系统，② 含噪声预测误差或一般预测误差的线性时变系统，③ 含仿射约束的时变线性二次型调节器系统，和④ 含一般约束和预测误差的非线性系统。

**关键词：**微扰分析；最优控制；模型预测控制；动态超额代价



## ABSTRACT

This paper proposes a general perturbation-based analysis framework to provide performance guarantees for predictive online controllers. The framework can be decomposed into three major steps: it first requires the derivation of two specific perturbation bounds for the Finite-Time Optimal Control Problem (FTOCP), then uses the perturbation bound to bound the per-step error of the online controller, and finally leads to a bound on the dynamic regret of the controller. In this way, our analysis framework reduces the study of performance guarantees for predictive online controllers to the well-studied problem of perturbation analysis, and thus enabling straightforward dynamic regret bounds under a variety of settings.

For the application of our analysis framework, we mainly focus on Model Predictive Control (MPC), a classical family of predictive online controllers. For MPC controllers, the analysis framework can be applied in a universal way, which we conclude as *the Fundamental Theorem of Perturbation-based Analysis*. To demonstrate the power of our analysis framework, we apply it to generalize existing regret bounds for MPC in different system settings that incorporate prediction errors, nonlinear dynamics, and constraints. Novel performance guarantees for MPC are shown in (1) systems with nonlinear time-varying dynamics, (2) linear time-varying systems with prediction errors on disturbances, cost functions, and/or dynamics, (3) time-varying LQR systems with affine constraints, and (4) time-varying nonlinear systems with general constraints and general prediction errors.

**Keywords:** perturbation analysis; optimal control; model predictive control; dynamic regret





# 目 录

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
主要符号表.....	VII
第 1 章 引言 .....	1
1.1 课题背景.....	1
1.2 文献调研.....	3
1.3 研究动机.....	5
第 2 章 问题描述和预备知识 .....	7
2.1 含预测的动态控制器.....	8
2.2 动力系统的基本假设.....	10
2.3 结果概述.....	13
第 3 章 基于微扰法的分析框架 .....	14
3.1 次态控制误差与微扰响应上界.....	14
3.2 微扰分析框架.....	17
3.2.1 模型预测控制器：微扰分析基本定理.....	17
3.2.2 带预测的动态控制器：框架的一般化.....	24
3.3 得到微扰响应上界的常用方法.....	29
第 4 章 模型预测控制在预测不含误差时的性能分析 .....	30
4.1 不含预测误差的线性时变系统.....	30
4.2 不含预测误差的非线性时变系统.....	31
第 5 章 模型预测控制在预测含误差时的性能分析 .....	33
5.1 仅噪声含预测误差的线性时变系统.....	33
5.2 含一般预测误差的时变线性二次型调节器系统.....	35
第 6 章 模型预测控制在系统含约束条件时的性能分析 .....	37
6.1 含仿射约束的时变线性二次型调节器系统.....	37
6.2 含一般约束和预测误差的非线性系统.....	38

第 7 章 结论 .....	40
插图和附表索引 .....	42
参考文献 .....	43
附录 A 外文资料的书面翻译 .....	48
附录 B 补充内容 .....	67
致 谢 .....	105
声 明 .....	107
在学期间参加课题的研究成果 .....	109

## 主要符号表

$\xi_t$	系统的不确定性参数，可用于参数化代价函数、动力学函数和约束函数。
$\xi_t^*$	系统不确定性参数的真值，对动态控制器而言是未知的。
$\xi_{\tau t}$	动态控制器在 $t$ 时刻对未来 $\tau$ 时刻不确定性参数 $\xi_{\tau}$ 的预测值 ( $\tau \geq t$ )。
$\Xi_t$	$t$ 时刻不确定性参数的取值空间，即要求 $\xi_t^*, \xi_{t \tau} \in \Xi_t$ ( $\tau \leq t$ )。不妨设 $\Xi_t$ 的直径不大于 1 (即 $\ \xi_t - \xi_t'\  \leq 1, \forall \xi_t, \xi_t' \in \Xi_t$ )。
$k$	动态控制器的预测视野，即在 $t$ 时刻，动态控制器可以得到不确定性参数的预测值 $\xi_{t:t' t}$ ，其中 $t' = \min\{t+k, T\}$ 。
ALG	含预测的动态控制器， $\text{MPC}_k$ 是它的一类特例。
cost(ALG)	给定最优控制问题的实例 $(x_{\text{init}}, \xi_{0:T}^*)$ ，控制器 ALG 确定的轨迹的总代价。
$\text{MPC}_k$	预测视野为 $k$ 的模型预测控制器 (见算法 2.1)。
OPT	离线最优控制器，它给出离线最优控制轨迹。
$\rho_{t,\tau}$	动态控制器在 $t$ 时刻对 $\tau$ 步后不确定性参数 $\xi_{t+\tau}$ 的预测误差，即 $\rho_{t,\tau} = \ \xi_{t+\tau}^* - \xi_{t+\tau t}\ $ (约定 $t+\tau > T$ 时 $\rho_{t,\tau} \equiv 0$ )。
$P(\tau)$	动态控制器对 $\tau$ 步后不确定性参数的平方加总预测强度，即 $P(\tau) := \sum_{t=0}^{T-\tau} \rho_{t,\tau}^2$ 。
$f_t(x_t, u_t; \xi_t)$	系统在 $t$ 时刻的代价函数。该函数族由 $\xi_t \in \Xi_t$ 参数化，其真值为 $f_t(x_t, u_t; \xi_t^*)$ 。
$g_t(x_t, u_t; \xi_t)$	系统在 $t$ 时刻的动力学函数。该函数族由 $\xi_t \in \Xi_t$ 参数化，其真值为 $g_t(x_t, u_t; \xi_t^*)$ 。
$s_t(x_t, u_t; \xi_t)$	系统在 $t$ 时刻的约束函数。该函数族由 $\xi_t \in \Xi_t$ 参数化，其真值为 $s_t(x_t, u_t; \xi_t^*) \leq 0$ 。
$F_T$	完整的最优控制问题在控制时长末尾 ( $T$ 时刻) 附加的终端代价函数 $F_T$ ，由问题 (2.1) 定义。
$\{F_{t+k}\}_{t=0}^{T-k-1}$	在 $t < T-k$ 时刻， $\text{MPC}_k$ 控制器求解未来 $k$ 步的有限时间最优控制问题时对末态采取的终端代价函数，可手动设计并向控制器输入。
$I_{t_1}^2(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F)$	在区间 $[t_1, t_2]$ 上的有限时间最优控制问题，其中 $z$ 是 $t_1$ 时

刻的初态,  $F$  是  $t_2$  时刻的终端代价函数;  $\xi_{t_1:t_2-1}$  是  $[t_1, t_2 - 1]$  时刻的不确定性参数 (可能为真值或预测值), 而  $\zeta_{t_2}$  是终端代价函数  $F$  的参数 (不一定是  $\Xi_{t_2}$  的元素)。

$\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F)$  有限时间最优控制问题  $I_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F)$  的一个最优解, 其下标索引为  $y_{t_1:t_2}$  (沿轨迹的状态) 和  $v_{t_1:t_2-1}$  (沿轨迹的控制输入)。

$\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F)$   $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2}; F)$  的简化记法。

$\ \cdot\ $	向量或矩阵的 2-范数。
$\cdot^T$	向量或矩阵的转置。
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	向量的内积。
$\cdot^\dagger$	矩阵的 Moore-Penrose 广义逆。
$\lambda(A)$	矩阵 $A$ 的特征值谱 ( $\lambda_{\min}(A)$ 、 $\lambda_{\max}(A)$ 为最小、最大特征值)。
$\sigma(A)$	矩阵 $A$ 的奇异值谱 ( $\sigma_{\min}(A)$ 、 $\sigma_{\max}(A)$ 为最小、最大奇异值)。
$A \geq B$	矩阵 $A - B$ 是半正定矩阵。
$(x_1, \dots, x_n)$	列向量 $x_1, \dots, x_n$ 依次拼接而成的列向量, 即 $[x_1^T, \dots, x_n^T]^T$ 。
$A(S_R, S_C)$	矩阵 $A$ 依行指标集 $S_R$ 和列指标集 $S_C$ 按顺序取出的子矩阵 (若 $A$ 是分块矩阵, 则取出相应的子块)。
$\nabla$	向量值函数的 Jacobian 矩阵, 或标量值函数的梯度。
$\nabla^2$	标量值函数的 Hessian 矩阵。
$\mathbb{R}$	实数集。
$\mathbb{B}(x, R)$	中心为 $x$ 、半径为 $R$ 的邻域。
$O(\cdot), o(\cdot), \Omega(\cdot)$	通常意义下的渐进记号。

FTOCP	有限时间最优控制问题 (finite-time optimal control problem)
LQR	线性二次型调节器 (linear quadratic regulator)
LTI	线性时不变的 (linear time-invariant)
LTV	线性时变的 (linear time-varying)
MPC	模型预测控制 (model predictive control)
SOCO	光滑在线凸优化问题 (smooth online optimization problem)

# 第 1 章 引言

## 1.1 课题背景

**最优控制问题** 在实际的生产生活中，人们遇到的许多复杂系统都可以作如下抽象：系统的状态 (*state*) 随时间按一定规律自然演化，而人们可以通过对系统进行某些容许的干预（称为控制输入 (*control input*) 或控制操作 (*control action*)), 使系统状态的演化按照人们预期的方式发生。研究如何有效地控制具备上述特征的动力系统 (*dynamical system*), 是控制理论 (*control theory*) 的核心课题。

在数学上，离散时间动力系统可以由动力学方程 (*dynamics*) 描述，即

$$x_{t+1} = g_t(x_t, u_t; \xi_t) \quad (1.1)$$

其中，在任意  $t$  时刻， $x_t \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态 (*state*),  $u_t \in \mathbb{R}^m$  为系统的控制输入 (*control input*), 它们都被抽象为线性空间中的向量； $\xi_t \in \Xi_t$  是一个描述动力系统不确定性的参数，它在系统运行过程中可能受外界因素影响取不同的值，并可能表现为不同的形式（如表现为加性的噪声输入 (*disturbance input*) 项  $w_t \in \mathbb{R}^n$ ）。此外，为了更好地刻画实际系统，有时还需对系统状态和控制输入的取值范围作一定限制，这样的限制称为约束集 (*constraint set*), 可记为  $(x_t, u_t) \in S_t$ 。

随着控制理论和最优化理论的发展，对动力系统的控制需求从最初的系统镇定 (*stabilization*)、系统解耦 (*decoupling*) 等定性目标，逐渐发展到最小化某一代价函数的定量目标。现代控制理论正是围绕着最优控制 (*optimal control*) 这一核心课题发展起来的，它研究在一定的代价 (*cost*) (或称性能指标 (*performance metric*)) 要求下，如何设计控制器使代价最小化。控制器的设计目标可以用一个优化问题描述，其优化目标函数为总代价，即

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t, u_t; \xi_t) + F_T(x_T; \xi_T) \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = g_t(x_t, u_t; \xi_t), \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && s_t(x_t, u_t; \xi_t) \leq 0, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中， $x_{\text{init}}$  是给定的初态 (*initial state*),  $T$  是控制时长 (*horizon*);  $f_t: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  是  $t$  时刻的阶段代价 (*stage cost*),  $F_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是终端代价 (*terminal cost*), 而

$s_t : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{s_t}$  是  $t$  时刻的约束函数 (*constraint function*)。

经典的现代控制理论研究主要将目光聚焦于线性系统 (*linear system*)，不仅较完善地解决了线性时不变系统 (*linear time-invariant, LTI*) 系统 ( $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t$ ) 中的最优控制问题，给出了线性反馈控制器 (*linear feedback controller*) 的显式表达式，同时也探讨了线性时变 (*linear time-varying, LTV*) 系统 ( $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t$ ) 中的相应结果。然而，非线性系统的最优控制器通常不能写出显式解，如何有效地设计、实现这样的控制器，是现代控制理论的核心问题之一。

**模型预测控制 (MPC)** 在传统的控制理论中，总是假定控制器设计者可借助测量、观测等方法事先确定系统模型，从而可以通过求解方程、求解优化问题等方式得到静态的 (*static*) 控制器 (如线性反馈控制器)，并可以在理论上证明其 (静态) 最优性。然而，在实际应用中，系统模型并不总能被事先观测，静态控制器也不一定总能满足控制需求；特别是一些模型随实际情况不断变化的系统 (如电力系统)，静态控制器很难对系统实施有效的控制。基于此，模型预测控制 (*model predictive control, MPC*) 便应运而生。

概而言之，模型预测控制是一类动态的 (*dynamical*) 控制算法的统称。它在每次决定控制输入时，可以获取未来一段时间 (称为预测视野 (*prediction horizon*) 或预测窗口 (*prediction window*)) 内对系统模型的预测，在预测视野内就预测的模型求解有限时间最优控制问题 (*Finite-Time Optimal Control Problem, FTOCP*)，从而实时计算下一时刻的最优控制输入<sup>[1]</sup>。这是一类较灵活的控制设计方案，通过适当的调节，在带有一般时变约束集和一般时变代价函数的非线性时变系统中仍能实现有效控制，能应对许多经典静态控制器难以处理的复杂系统<sup>[2-5]</sup>。正因如此，模型预测控制已被广泛地运用于各种实际控制问题中，在机器人控制<sup>[6-10]</sup>、自动驾驶<sup>[11-17]</sup>、智能电网<sup>[18-24]</sup>、生产过程控制<sup>[25-27]</sup>等领域都有令人耳目一新的表现，近年来也成为控制理论和学习理论交叉的热点研究方向。

**动态控制器的性能分析** 随着对动态控制器设计的研究不断深入，其动态控制性能的分析也逐渐引起了研究者的注意，并在近期取得了诸多进展。影响力较大的工作包括对 RHGC<sup>[28-29]</sup>、AFHC<sup>[20,30]</sup> 等带有预测视野限制的在线控制算法的性能分析，对基于在线凸优化 (*online convex optimization, OCO*) 方法的无超额代价最优控制器的分析<sup>[31-32]</sup>，以及对 ROBD 算法及其变种在预测模型缺失<sup>[33-34]</sup> 或状态观测滞后<sup>[35]</sup> 时的性能分析。此外，还有一支工作研究在一定系统模型下一切动态控制器所能达到的性能上界，如在已知线性时不变系统中的性能上界<sup>[36]</sup> 和在未知线性时变系统中的性能上界<sup>[37]</sup>。

尽管模型预测控制器在实际应用中已经取得了较为广泛的成功，但关于其控制性能的理论保证还显得相当不充分：在早期很长的一段时间内，只有关于模型预测控制器的渐进 (*asymptotic*) 性能保证，如闭环系统的稳定性或收敛性等<sup>[38-41]</sup>；随着研究的深入，模型预测控制器的非渐进性能保证也逐渐见于文献，包括静态超额代价 (*static regret*)<sup>[32,42]</sup>、动态超额代价 (*dynamic regret*)<sup>[29,43]</sup> 和性能竞争比 (*competitive ratio*)<sup>[34]</sup> 等。然而，上述结果几乎都局限于线性时不变 (*linear time-invariant, LTI*) 系统和二次型代价函数，其中一些结果仅对线性二次型调节器 (*linear quadratic regulator, LQR*) 这一特殊问题成立；对于一般的情形，受制于分析方法本身的局限性，相应理论保证的导出仍有一定困难。尽管许多实际系统都可以被近似地建模为线性时不变系统，但在更加复杂的系统中采取更复杂的动力系统模型仍有其实用价值。例如，在交流发电系统的工频调节问题中，系统的动力学方程与总电能供给中可再生能源的比例相关，从而必然是时变的<sup>[18,44]</sup>；在机器人的路线规划与预测控制中，通常也需考虑非线性动力学方程和一般的良态代价函数，来更好地近似非线性系统<sup>[5,11,45-46]</sup>。

近两年来，通过引入新的分析方法，在更一般的系统模型下（如非线性时变系统、良态代价函数、模型预测带有误差等情形）也给出了模型预测控制器的理论性能保证。例如，[47] 讨论了含有预测误差的路径追踪型线性时变系统中模型预测控制器的动态超额代价上界，而 [48] 则给出了不含预测误差的一般线性时变系统中模型预测控制器的动态超额代价与性能竞争比上界。跟随这些工作，我们希望给出一种通用的分析方法，并研究更一般的情形下模型预测控制器的性能。

## 1.2 文献调研

本节主要对已有文献中导出控制器理论性能保证的几种常见方法进行梳理总结。正如前文所述，较早的工作主要关注线性时不变系统，乃至线性二次型调节器问题。这些文献中使用的方法大多依赖系统模型中某些关键参数的闭式 (*closed-form*) 刻画，主要包括以下两类：

**预期代价函数法** 该方法借鉴了经典控制理论对线性二次型调节器问题的处理方式。利用动态规划的思想，可以定义系统关于任意状态的预期代价函数 (*cost-to-go function*)，即从该状态起采取最优控制策略导致的最小总代价。不难验证：预期代价函数是初态的二次型，且二次型矩阵具有闭式表示；进而，预期代价函数也有闭式解，由此可表示出最优控制轨迹上的控制输入和中间状态。这些闭

形式为模型预测控制在二次型调节器问题中的性能分析提供了便利<sup>[43,47,49]</sup>。此方法的局限性也较为明显：对于更一般的非线性动力学方程或良态代价函数，通常无法写出预期代价函数的闭形式，此方法也便难以应用了。

**在线优化问题规约法** 该类方法将最优控制问题规约 (*reduce*) 至便于分析的等价问题。由于最优控制问题本质上是在求解带有等式约束的优化问题，在一定条件下，可将模型预测控制视为在线凸优化问题 (*online convex optimization, OCO*) 加以求解和分析，从而绕过了对动力系统本身的闭式求解。该方法本身对系统模型的形式没有太多要求，但对于不同形式的优化问题，往往需采用特定的规约技巧，因此难以形成统一的分析框架。事实上，已有的结果大多针对问题的特殊结构设计专门的算法，并证明其具有动态超额代价、性能竞争比等性能保证。其中，一些工作（如 [29,34,50]）考虑具有控制标准型 (*control canonical form*) 形式的系统，有助于将问题转化为便于分析的受限形式，但线性时变系统中不存在这样的标准型；另一系列工作（如 [31-32]）在转化的在线凸优化问题上附加了特殊的结构（如带有定长的状态存储器，称为带存储的在线凸优化问题 (*OCO with memory*)），但该方法只能得到静态超额代价这一种性能保证，并且也不能很好地适用于线性时变系统。

利用上述分析方法，在线性系统（尤其是线性时不变系统）中，已经有一些工作给出了一般模型预测控制器的性能保证<sup>[43,47,49]</sup>，也有一些工作从实际应用的角度探讨了怎样调节预测窗口以降低超额代价和性能竞争比<sup>[29,43,47,49]</sup>。然而，在一般系统中的相应课题却没有给出令人满意的结果，这在很大程度上是既有的分析方法与系统性质不相匹配所致。

**微扰法** 近年来，许多研究者将目光转向了一种新的分析方法，即微扰法 (*perturbation method*)。微扰法在优化理论中起步很早、应用甚广，但直到最近才被引入控制理论的研究中。概而言之，微扰法分析动力系统在系统参量（如系统初态、噪声和其他不确定性参数等）受到微小扰动时，闭环系统状态轨迹对微扰的响应，这种响应反映了闭环系统对系统参量的敏感程度；当这种微扰响应呈现随时间衰减的特征时，即可将受控轨迹的次态视为对最优轨迹次态的微扰，从而得到控制器的超额代价在时间上的积累特征。正如 [48] 所指出的那样，微扰法在分析的通用性上具有优势，因为它将控制器的性能分析分解为相对独立的两步：只要得到了系统的微扰响应上界，就能利用微扰法推出新的性能保证结果。此外，由于优化理论的研究对许多有限时间最优控制问题已经给出了相应的微扰响应上界（如 [51-55]），只要能建立基于微扰法的通用分析框架，就可以轻松地得到



模型预测控制器在一系列新系统中的理论性能保证。

微扰法的应用已经在许多不同的系统中给出了模型预测控制器（或其变种）的理论性能保证<sup>[47-48,56-57]</sup>。例如，在我们稍早前完成的工作 [48] 中，已证明了在带有良态代价函数的线性时变系统中，若预测完全精确且没有约束集，则预测视野为  $k$  的 MPC 控制器给出  $O(\lambda^k T)$  的动态超额代价和  $1 + O(\lambda^k)$  的性能竞争比，且两者均随预测视野  $k$  的增大而指数衰减（这里  $\lambda < 1$  为依赖于系统参数的衰减速率）。这是线性时变系统中模型预测控制器的首个非渐进性能保证，但它采用的分析方法只适用于预测不含误差的情形，具有一定的局限性。又如，[51-52] 等工作分别证明了模型预测控制器在含约束集的线性时不变系统与不含约束集的非线性系统中的性能保证，但这些工作要求模型预测控制器每次确定未来相当长一段时间（称为重规划窗口（*replanning window*））内的控制输入，而不总是基于新预测滚动地求解下一时刻的控制输入——这种违背直觉的设计完全是出于理论分析上的需要，但并不具备太多实用价值，同样有较强的局限性。

总而言之，目前已有一些工作利用微扰法给出了模型预测控制器的性能保证，但这些分析方法通常需要在系统模型中引入一些不甚自然的假设（例如预测不含误差、重规划窗口需充分大等），也不能很好地处理一般的系统模型（尤其是约束集和非线性动力学方程）。此外，已有文献中的分析方法通常是针对所分析的问题专门设计的，而很难推广到其他情形<sup>[43,47-48,51-52]</sup>。通用分析框架的缺失无疑给基于微扰法的理论分析增加了不必要的难度。

### 1.3 研究动机

在我们此前的工作 [48] 中，我们已经形成了微扰分析框架的雏形，并在带有一般良态代价函数的线性时变系统中给出了模型预测控制器的性能保证，该工作无论在方法上还是在结果上都是创新的。然而，前述工作仅考虑了最简单的系统模型，其局限性在于：① 没有考虑非线性系统；② 控制器获得的预测总是准确的，动力学方程和代价函数都不存在任何预测误差；③ 要求状态与控制输入不受约束条件的限制，而允许其在全空间自由选取。虽然简化的情形已经在很大程度上揭示了模型预测控制器的性能，但克服这些限制将帮助我们更好地理解 and 解释模型预测控制器在实际应用中的表现。

**非线性系统** 虽然线性系统已经足以近似许多实际系统，但也有一些系统的线性化模型与真实系统相去甚远，线性化模型中的分析难以完整反映真实系统中

的情况。因此，有必要将分析框架及结论推广至非线性系统。

**预测误差** 在 [48] 中，为了强调新分析框架的分析思路，我们假定所有预测都不存在误差，但这样的假设并不符合实际。在现实中，系统模型预测模块通常需要通过学习方法（如贝叶斯网络、人工神经网络等）实现，而这不可避免地引入了预测误差。其中，对系统噪声的预测误差影响相对平缓，而对动力学方程的预测误差则可能显著地改变系统的动力学性质，从而影响控制器的实际性能。

**约束条件** 在真实系统中，系统参量和控制输入通常只能在较小范围内取值，而不能趋于无穷大，否则将失去实际意义。将真实系统建模为动力系统时也需要考虑这种限制，而模型预测控制器相比传统控制器最大的优势之一，就在于它能更好地处理约束条件。因此，将含约束的系统纳入分析框架中也是十分必要的。

本文中，我们将推广 [48] 中提出的微扰分析框架，使其能涵盖以上三种系统。同时，为了方便应用，我们还将分析框架流水线化，并针对模型预测控制器给出将微扰响应上界直接转化为动态超额代价上界的微扰分析基本定理。随后，我们将这一框架应用于多种不同的系统模型中，得到相应的性能保证，希望以此展示分析框架的通用性。

## 第 2 章 问题描述和预备知识

本文考虑一类带有一般时变代价函数、动力学函数和约束函数的（离散时间）有限时长最优控制问题，其一般形式为

$$\begin{aligned}
 & \underset{x_{0:T}, u_{0:T-1}}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t, u_t; \xi_t^*) + F_T(x_T; \xi_T^*) \\
 & \text{subject to} && x_{t+1} = g_t(x_t, u_t; \xi_t^*), \quad \forall 0 \leq t < T, \\
 & && s_t(x_t, u_t; \xi_t^*) \leq 0, \quad \forall 0 \leq t < T, \\
 & && x_0 = x_{\text{init}}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中,  $x_t \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态 (*state*),  $u_t \in \mathbb{R}^m$  为系统的控制输入 (*control input*) (也称为控制操作 (*action*));  $f_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi_t \rightarrow \mathbb{R}$  是时变的阶段代价 (*stage cost*) 函数,  $F_T : \mathbb{R}^n \times \Xi_T \rightarrow \mathbb{R}$  是终端代价 (*terminal cost*) 函数,  $g_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi_t \rightarrow \mathbb{R}^n$  是时变的动力学 (*dynamics*) 函数,  $s_t$  是时变的约束 (*constraint*) 函数, 它们都包含刻画系统不确定性的不确定性参数 (*uncertainty parameter*)  $\xi_t \in \Xi_t$ , 其真值为  $\xi_t^*$  (显然, 这些参数的真值对动态控制器而言是未知的)。

若系统的一切参量 ( $x_{\text{init}}$  和  $\xi_{0:T}^*$ ) 已知, 则可以直接求解优化问题 (2.1), 从而得到系统的离线最优控制轨迹 **OPT**。然而, 含预测的动态控制器在任何时刻都只能观察到一段有限预测视野内系统参量的预测值, 并且这些预测值很可能不是精确的。动态控制器的设计目标是在仅有含误差预测的条件下尽可能地“接近”离线最优控制轨迹 **OPT**。为衡量动态控制器轨迹 **ALG** 劣于 **OPT** 的程度, 我们引入动态超额代价和性能竞争比两种性能评价指标 (*performance metrics*), 它们是动态控制和动态优化领域的标准性能评价指标<sup>[28,33,47-49,58]</sup>。

**定义 2.1 (控制算法的性能评价指标)**. 给定最优控制问题 (2.1) 的任一实例  $(x_{\text{init}}, \xi_{0:T}^*)$ , 设  $\text{cost}(\text{OPT})$ 、 $\text{cost}(\text{ALG})$  分别表示系统沿离线最优控制轨迹 **OPT** 和动态控制器轨迹 **ALG** 的总代价。则动态控制器 **ALG** 的动态超额代价 (*dynamic regret*) 定义为所有实例中算法代价与最优代价之差的上界, 即

$$\sup_{x(0), \xi_{0:T}^*} (\text{cost}(\text{ALG}) - \text{cost}(\text{OPT})),$$

而动态控制器 **ALG** 的性能竞争比 (*competitive ratio*) 定义为所有实例中算法代价

与最优代价之比的上界，即

$$\sup_{x(0), \xi_{0:T}^*} \frac{\text{cost}(\text{ALG})}{\text{cost}(\text{OPT})}.$$

为方便起见，通常将控制器轨迹 **ALG** 和离线最优控制轨迹 **OPT** 表示如下：

$$\text{ALG} : x_0 \xrightarrow{u_0} x_1 \xrightarrow{u_1} \dots \xrightarrow{u_{T-1}} u_T,$$

$$\text{OPT} : x_0 \xrightarrow{u_0^*} x_1^* \xrightarrow{u_1^*} \dots \xrightarrow{u_{T-1}^*} u_T^*.$$

## 2.1 含预测的动态控制器

本节刻画含预测的动态控制器 (*predictive online controller*) 在决策时所获知信息的质量 (即对系统参数的预测能力)。显然，预测的质量既取决于预测视野的长度、也取决于预测值与真值的偏差度，而具备较好预测质量的动态控制器也将自然地具有较好的性能。随后，我们将定义本文关注的模型预测控制器  $\text{MPC}_k$  (下标  $k$  指示控制器的预测视野)，它完全符合我们对含预测动态控制器的要求。

动态控制器对系统参量的预测具有不确定性。为了统一地表征代价函数、动力学函数和约束函数中的不确定性，我们假定这些函数的真值和预测值都只能在相应的函数族中取值 (这些函数族都以  $\xi_t$  为参数)：

$$\mathcal{F}_t := \{f_t(x_t, u_t; \xi_t) \mid \xi_t \in \Xi_t\}, \quad \mathcal{F}_T := \{F_T(x_T; \xi_T) \mid \xi_T \in \Xi_T\};$$

$$\mathcal{G}_t := \{g_t(x_t, u_t; \xi_t) \mid \xi_t \in \Xi_t\}; \quad \mathcal{S}_t := \{s_t(x_t, u_t; \xi_t) \mid \xi_t \in \Xi_t\}.$$

同时，假定动态控制器事先知道函数族  $\mathcal{F}_{0:T}, \mathcal{G}_{0:T-1}, \mathcal{S}_{0:T-1}$ ，只是不知道参数的真值  $\xi_{0:T}^*$ 。如此，在  $t$  时刻，动态控制器只需要预测未来  $k$  步的参数  $\xi_{t:t+k|t} \in \prod_{\tau=t}^{t+k} \Xi_\tau$ ，就能得到预测的系统参量。这里，我们只要求参数空间  $\Xi_t$  上定义有距离测度，而不要求其是向量空间，也不要求不同时刻的  $\Xi_t$  维度相同。若进一步对函数族作一定的光滑性假设，则预测质量 (预测误差) 可以由预测值与真值的距离表征。

**定义 2.2 (预测误差).** 对任意  $t \geq 0, \tau \geq 0$ ，称  $\rho_{t,\tau} := \|\xi_{t+\tau|t} - \xi_{t+\tau}^*\|$  为控制器在  $t$  时刻对  $(t+\tau)$  时刻参数的预测误差 (*prediction error*)。进而，称  $P(\tau) := \sum_{t=0}^{T-\tau} \rho_{t,\tau}^2$  为控制器对  $\tau$  步后参数的 (平方加总) 预测强度 (*prediction power*)。

在上述预测模型下，一个含预测的动态控制器 **ALG** 可以根据当前系统状态和当前时刻预测的参数决定该时刻的控制输入。我们给出其严格定义，读者可以验证：之后定义的  $\text{MPC}_k$  控制器确为一种含预测的动态控制器。

**定义 2.3 (含预测的动态控制器).** 含预测的动态控制器是函数  $\text{ALG} : \mathbb{R}^n \times \Xi_{t:t+k} \times$

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 在时刻  $t$ , 它接受当前系统状态  $x_t$ 、当前时刻预测的参数  $\xi_{t:t+k}$  和时刻  $t$  作为输入, 并返回该时刻的控制输入

$$u_t = \text{ALG}(x_t, \xi_{t:t+k}; t)。$$

含预测的动态控制器只能求解预测视野内的“部分时长”优化问题, 故我们如下定义最优控制问题在区间  $[t_1, t_2]$  上的部分问题, 称为有限时间最优控制问题 (FTOCP), 它给出在给定的 ( $t_1$  时刻) 初态  $z$ 、( $t_2$  时刻) 终端代价  $F$  和 (预测的) 参数  $\xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}$  下, 部分问题的最优子轨迹  $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F)$ 。我们将看到, 控制器  $\text{MPC}_k$  的设计中也要求解有限时间最优控制问题。

**定义 2.4 (有限时间最优控制问题).** 在区间  $[t_1, t_2]$  上, 关于初态  $z$ 、终端代价  $F(\cdot; \cdot)$  和参数  $\xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}$  的有限时间最优控制问题 (FTOCP) 定义为

$$\begin{aligned} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F) &:= \min_{y_{t_1:t_2}, v_{t_1:t_2-1}} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} f_t(y_t, v_t; \xi_t) + F(y_{t_2}; \zeta_{t_2}) \\ \text{subject to } y_{t+1} &= g_t(y_t, v_t; \xi_t), \quad \forall t_1 \leq t < t_2, \\ s_t(y_t, v_t; \xi_t) &\leq 0, \quad \forall t_1 \leq t < t_2, \\ y_{t_1} &= z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

并令  $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \zeta_{t_2}; F)$  表示该问题的一个最优解 (若有多个最优解, 将在具体问题中指明取最优解的方式)。

在上面的定义中, 我们将末态的参数记为  $\zeta_{t_2}$  而非  $\xi_{t_2}$ , 其实是有意为之的。事实上, 由于问题 (2.1) 中并未给出  $t_2 \neq T$  时的终端代价函数, 动态控制器必须手动设置这些代价函数, 它们的参数化方式未必与  $f_{t_2}$  相同。因此, 为强调  $\zeta_{t_2}$  的取值范围不一定为  $\Xi_{t_2}$ , 我们改用记号  $\zeta_{t_2}$ 。当然, 若确实有  $\zeta_{t_2} \in \Xi_{t_2}$ , 或上下文不致引起歧义时, 可以恢复原参数记号  $\xi_{t_2}$ , 并将有限时间最优控制问题的解简记为  $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F) := \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2}; F)$ 。

还需指出: 在上面的定义中, 只允许用终端代价函数约束末态, 似乎不允许 (如我们在 [48] 中所做的那样) 直接指定终端状态。为弥补这一点, 我们将终端代价  $F(\cdot; \zeta_{t_2})$  视为广义函数, 允许其值域为  $[-\infty, +\infty]$ 。此时, 为使终端状态到达指定状态  $\zeta_{t_2} \in \mathbb{R}^n$ , 只需将终端代价函数取为  $\zeta_{t_2}$  的指示函数 (indicator function)  $\mathbb{I}(\cdot; \zeta_{t_2})$ , 该函数定义为

$$\mathbb{I}(y_{t_2}; \zeta_{t_2}) = \begin{cases} 0 & y_{t_2} = \zeta_{t_2} \\ +\infty & y_{t_2} \neq \zeta_{t_2} \end{cases}。$$

最后,基于上述有限时间最优控制问题,我们可以引入模型预测控制器  $\text{MPC}_k$ ,其伪代码描述见算法 2.1。简而言之,在  $t$  时刻,  $\text{MPC}_k$  基于预测的参数求解未来  $k$  步内的有限时间最优控制问题,并提交解轨迹上的第一个控制输入作为当前时刻的控制输入;特别地,若剩余控制时长不足  $k$ ,则  $\text{MPC}_k$  将求解到  $T$  时刻为止的子问题(此时采用真实的终端代价函数  $F_T$ )。

---

**算法 2.1** 预测视野为  $k$  的模型预测控制器  $\text{MPC}_k$

---

**Require:** 给定  $k \leq t < T$  时刻的终端代价函数  $F_t$ 。

- 1: **for**  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  **do**
  - 2:    $t' \leftarrow \min\{t + k, T\}$
  - 3:   观察当前系统状态  $x_t$ , 并取得参数的预测值  $\xi_{t:t'|t}$ 。
  - 4:   求解 FTOCP, 并提交解轨迹上首个控制输入  $u_t \leftarrow \psi_t'(x_t, \xi_{t:t'|t}; F_{t'})_{v_t}$ 。
  - 5: **end for**
- 

需要指出: 本文着重分析动态控制器性能受预测精度影响的程度, 因此并不关心控制器如何获得参数的预测值, 而只将预测误差的上界作为假设。

## 2.2 动力系统的基本假设

在给定了动力系统的形式后, 为得到模型预测控制器的性能保证, 通常还要对代价函数、动力系统、约束函数、预测量与参数  $\xi_t$  的函数关系等作一定的假设。当然, 在不同系统中, 这些假设的表现形式也会有所变化, 但总体而言, 应用微扰分析基本定理所需要的假设包括: ① 良态代价函数; ② Lipschitz 连续的动力学函数, 及系统的一致可控性; ③ 预测量函数族关于参数  $\xi_t$  的 Lipschitz 连续性; ④ 离线最优控制轨迹的稳定性; ⑤ (若系统有约束) 在离线最优轨迹附近, 等式约束及活跃的 (*active*) 不等式约束局部线性独立。应当指出, 上述假设在不同系统中可能采取不同的表述形式, 也可能使用其中一个或数个假设的推论作为假设以简化表述形式。本节后续部分将分别对上述假设的定义和含义作阐释说明。

**代价函数** 为使微分运算可行且有界, 各阶段代价函数  $f_t$  ( $0 \leq t < T$ ) 及终端代价函数  $F_T$  都应当是良态函数 (*well-conditioned function*), 即同时具有非负性、二阶连续可导、 $\mu$ -强凸性和  $\ell$ -光滑性。这些假设可以等价地表述为函数极小值的非负性和 Hessian 矩阵特征值谱的有界性 ( $\mu \leq \nabla^2 f_t, \nabla^2 F_T \leq \ell$ )。特别地, 对二次型代价函数,  $\nabla^2 f_t$ 、 $\nabla^2 F_T$  均为常矩阵(代价矩阵), 且函数极小值自然为 0, 故上述假设又可等价地表述为代价矩阵特征谱的有界性。

**动力系统** 对动力学函数  $g_t$  的基本假设是要求其具有 Lipschitz 连续性, 即

$$\|g_t(x_t, u_t; \xi_t^*) - g_t(x'_t, u'_t; \xi_t^*)\| \leq L_g (\|x_t - x'_t\| + \|u_t - u'_t\|)。$$

应当指出: 为了应用微扰分析基本定理, 我们只要求动力学函数关于控制输入  $u_t$  具有 Lipschitz 连续性, 因为这保证了对控制输入  $u_t$  的微扰对次态  $x_{t+1}$  的影响是有界的。读者容易想象这一假设是必要且自然的。

关于动力系统的另一个较不平凡的假设是要求其具有一致可控性 (*uniform controllability*)。直观上, 这意味着控制器总可以通过恰当的控制输入, 在有限步内将系统引导至任意指定的目标态, 且控制输入的模长有界。这里我们针对一般系统给出一致可控性的定义。

**定义 2.5 ( $\sigma$ -一致可控性).** 在一般的非线性动力学系统  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t; \xi_t)$  中, 对任意给定的  $(x_t, u_t)$  和区间  $[t_1, t_2]$ , 令  $A_t := \nabla_{x_t}^\top g_t(x_t, u_t; \xi_t)$ 、 $B_t := \nabla_{u_t}^\top g_t(x_t, u_t; \xi_t)$  表示动力学方程的线性化系数矩阵, 并定义  $(x_{t_1:t_2}, u_{t_1:t_2})$  处的 (局部线性化) 转移矩阵 (*transition matrix*)  $\Phi(t_2, t_1; x_{t_1:t_2}, u_{t_1:t_2}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为

$$\Phi(t_2, t_1; x_{t_1:t_2}, u_{t_1:t_2}) := \begin{cases} A_{t_2-1} A_{t_2-2} \cdots A_{t_1} & t_2 > t_1 \\ I & t_2 \leq t_1 \end{cases}。$$

对任意时刻  $t$  及间隔  $p \geq 0$ , 定义  $(x_{t:t+p}, u_{t:t+p})$  处的可控性矩阵 (*controllability matrix*)  $M(t, p; x_{t:t+p}, u_{t:t+p}) \in \mathbb{R}^{n \times (mp)}$  为

$$M(t, p; x_{t:t+p}, u_{t:t+p}) := [\Phi(t+p, t+1)B_t, \dots, \Phi(t+p, t+p)B_{t+p}]。$$

进而, 称动力系统是可控的 (*controllable*), 若存在称为可控性指数 (*controllability index*) 的整数  $d$ , 使得可控性矩阵  $M(t, d; x_{t:t+d}, u_{t:t+d})$  在一切时刻  $t$  及一切  $(x_{t:t+d}, u_{t:t+d})$  处行满秩。称动力系统是  $\sigma$ -一致可控的 ( *$\sigma$ -uniformly controllable*), 若存在常数  $\sigma > 0$ , 使得  $\sigma_{\min}(M(t, d; x_{t:t+d}, u_{t:t+d})) \geq \sigma$  在一切时刻  $t$  及一切  $(x_{t:t+d}, u_{t:t+d})$  处成立, 这里  $\sigma_{\min}$  表示矩阵的最小非平凡奇异值。

容易看到: 对于线性系统,  $A_t$ 、 $B_t$  恰为系统的动力学矩阵, 故上述定义即退化到控制理论中对可控性矩阵和  $\sigma$ -一致可控性的通行定义 (此时各矩阵均与  $x$ 、 $u$  无关); 对于非线性系统而言, 这一假设可大致理解为在所给轨迹附近作局部线性化, 且线性化后的系统是可控的, 从而轨迹可以在局部小范围内自由移动。

**由  $\xi_t$  参数化的预测量** 为了确保预测误差减少时预测量的误差也相应地减少 (减少的速度不低于线性), 我们要求所有预测量关于  $\xi_t$  的函数有界且是 Lipschitz 连续的。例如, 若线性系统的动力学方程被参数化为  $x_{t+1} = A_t(\xi_t)x_t +$

$B_t(\xi_t)u_t + w_t(\xi_t)$ , 则应假设  $A_t(\xi_t), B_t(\xi_t), w_t(\xi_t)$  关于  $\xi_t$  都是 Lipschitz 连续的。

**离线最优控制轨迹 OPT** 为确保系统沿最优轨迹演化时总代价不至于过大, 我们要求 OPT 本身是 *Lyapunov* 稳定的 (*stable*), 即存在常数  $D_{x^*}$  使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  ( $x_t^*$  是轨迹 OPT 上  $t$  时刻的状态)。当然, 这一性质有时无需额外假设即自然成立 (如在不约束线性时变系统中, 见引理 B.11), 有时可作为其他假设的推论 (如在不约束非线性时变系统中, 若相邻时刻动力学函数的极小值点距离有界, 则可证明 OPT 的稳定性)。但为了方便在更复杂的系统中对结论作统一、简洁的叙述, 我们将这一性质也作为一个独立的假设。

**约束函数** 对于含约束的最优控制问题, 保证动态控制器控制下轨迹的递归可行性 (*recursive feasibility*) 十分关键, 并且在技术上是非凡的<sup>[59]</sup>。若不加额外假设, 则可能出现这样的情形: 在某一时刻  $t$  的状态  $x_t$  处, 受到约束集的限制, 控制器无法选择可行的控制输入使次态  $x_{t+1}$  仍在约束集内, 而动态控制器因受到预测视野的限制又无法提前预知这一点。为了绕开这一障碍, 通常需要恰当地选取动态控制器的参数 (如恰当选取  $\text{MPC}_k$  的终端约束或终端代价函数), 同时还需对系统作额外的假设 (如 *SSOSC* 条件 (*strong second-order sufficient conditions*) 和 *LICQ* 条件 (*linear independent constraint qualification*), 这些都是凸优化中保证可行性的常见条件)。下面我们就定义这两个条件。

**定义 2.6.** 对一约束优化问题, 设其原始变量为  $\alpha$ 、对偶变量为  $\eta$ 、约束函数为  $s(\alpha, \eta)$ , 相应的 Lagrangian 量为  $\mathcal{L}(\alpha, \eta)$ 。在某一点  $(\alpha, \eta)$  处, 设  $H(\alpha, \eta) := \nabla_{\alpha\alpha}^2 \mathcal{L}(\alpha, \eta)$  为 Lagrangian 量的 Hessian 矩阵,  $A$  为约束函数中等式约束与活跃不等式约束的行序号构成的指标集,  $G(\alpha, \eta) := \nabla_{\alpha}^{\top} s(\alpha, \eta)[A, :]$  为活跃约束的 *Jacobian* 矩阵 (*active-constraint Jacobian*),  $U$  是  $G(\alpha, \eta)$  的零空间矩阵 (即  $U$  的列向量正交归一, 且张成  $G(\alpha, \eta)$  的零空间), 则优化问题在  $(\alpha, \eta)$  处的约化 Hessian 矩阵 (*reduced Hessian*) 定义为  $H_{\text{re}}(\alpha, \eta) := U^{\top} H U$ 。

**定义 2.7 (SSOSC 条件).** 称约束优化问题在  $(\alpha, \eta)$  处满足 *SSOSC* 条件, 如果其约化 Hessian 矩阵  $H_{\text{re}}(\alpha, \eta)$  是正定阵, 即  $H_{\text{re}}(\alpha, \eta) > 0$ 。

**定义 2.8 (LICQ 条件).** 称约束优化问题在  $(\alpha, \eta)$  处满足 *LICQ* 条件, 如果其活跃约束的 *Jacobian* 矩阵  $G(\alpha, \eta)$  行满秩, 即  $\sigma_{\min}(G(\alpha, \eta)) > 0$ 。

还应当指出, 尽管乍看之下上述关于约束的条件十分复杂, 似乎很难被验证, 但多数情况下它们可以从一组更常见的假设下推出, 甚至有时候这组假设的全部作用就是推出这些关于约束的条件。例如, [57] 中的引理 12 表明, 动力学函数的 Lipschitz 连续性和系统的  $\sigma$ -一致可控性可导出 (一致) *LICQ* 条件。因此, 这些关



于约束集的条件本质上也蕴含了系统其他方面的性质。为了表述的清晰简洁，在后文中我们可能用这些关于约束集的假设替代更底层的假设。

## 2.3 结果概述

式 (2.1) 是对最优控制问题的一种一般刻画，涵盖了许多理论研究中关注的系统模型。本文中，我们将考虑六种不同的系统模型，这些模型在以下方面有所区别：① 代价函数、动力学函数和约束函数的具体形式；② 系统内含有预测误差的参量（即含参数  $\xi_t$  的参量）；③ 预测误差的上界。下表 2.1 展示了本文所考虑的全部系统在系统模型上的差异。

表 2.1 本文考虑的系统模型一览

章节	代价	动力学	约束	预测量	预测误差
4.1	可拆分	线性时变	—	—	—
4.2	一般	非线性时变	—	—	—
5.1	可拆分	线性时变	—	噪声: $w_t$	有界
5.2	二次型	线性时变	—	代价: $Q_t, R_t, \bar{x}_t$ 动力学: $A_t, B_t$	充分小
6.1	二次型	线性时变	仿射约束	—	—
6.2	一般	非线性时变	一般约束	代价: $f_t$ 动力学: $g_t$ 约束: $s_t$	充分小

我们指出：在上表中，6.2 节的系统模型似乎最一般，而其他的各节系统模型之间似乎也有蕴含关系，但这并不意味着我们只需要考虑最一般的系统模型。事实上，为了使控制器在最一般的假设下有性能保证，通常需要施加更强的假设，同时系统的微扰响应上界通常也更弱，从而只能得到较弱的性能保证。通过单独讨论较特殊的情形，可以帮助我们更精确地了解同一控制器在不同系统模型下的性能差异，同时也方便我们根据实际的系统模型选用对应的理论结果。总而言之，一般情形与特殊情形的讨论都有其各自的理论意义，两者不可相互替代。

## 第 3 章 基于微扰法的分析框架

本章的主要目的是介绍一种新的基于微扰法的分析框架，该框架完全是流水线式的，即：只要在某一系统中证明了微扰分析基本定理所需的微扰上界，结合系统的一些基本性质，就可直接推知相应系统中的  $\text{MPC}_k$  控制器具有有界的动态超额代价。本章的结构如下：我们首先介绍次态控制误差的定义，并直观说明次态控制误差累加引理所需要的微扰上界的形式；随后，我们针对  $\text{MPC}_k$  控制器，给出一种较简化的微扰分析框架，证明了关于  $\text{MPC}_k$  的次态控制误差有界引理和次态控制误差累加引理，并最终得到  $\text{MPC}_k$  的微扰分析基本定理；最后，我们将微扰分析框架进一步推广，提出针对一般动态控制器的可能分析思路。本章最后，我们还将简要地探讨在系统模型中证明微扰上界的几种常见方法。

在本章中，我们总假设下述基本性质成立，以方便微扰分析框架的表述。在具体的系统实例中，这些性质可能作为假设，也可能作为可证明的事实出现。

**性质 3.1 (系统的基本性质).** 关于系统的下述性质成立：

- 离线最优控制轨迹  $\text{OPT}$  的稳定性：存在常数  $D_{x^*} > 0$ ，使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  对一切  $\text{OPT}$  上的状态  $x_t^*$  成立。
- 动力学函数的 *Lipschitz* 连续性：系统的动力学函数  $g_t(x_t, u_t; \xi_t^*)$  关于控制输入  $u_t$  具有  $L_g$ -*Lipschitz* 连续性。
- 良态代价函数：各阶段代价  $f_t(x_t, u_t; \xi_t^*)$  及终端代价  $F_T(x_T; \xi_T^*)$  均为非负函数，且关于  $(x_t, u_t)$ （或  $x_T$ ）具有凸性和  $\ell$ -光滑性。

### 3.1 次态控制误差与微扰响应上界

**次态控制误差** 当我们尝试比较动态控制器轨迹  $\text{ALG}$  与离线最优控制轨迹  $\text{OPT}$  时，将遇到这样的困难：在  $t$  时刻， $x_t$  与  $x_t^*$  通常并不相同，这时直接比较  $u_t$  与  $u_t^*$  是毫无意义的。为解决这一困难，我们仅需额外求解区间  $[t, T]$  上的后继最优控制轨迹 (*clairvoyant optimal trajectory*)，并将轨迹上的第一个控制输入与  $u_t$  比较，如果两者的距离有一上界，则由动力学函数关于控制输入的 *Lipschitz* 连续性，两条轨迹的次态距离也有一上界。上述分析启发我们如下定义次态控制误差 (*per-step error*)，并借之分析动态超额代价的上界。我们额外指出，这一思路与强化学习理论中的性能差值引理及其证明<sup>[48]</sup>有异曲同工之妙。

**定义 3.1 (后缀最优控制轨迹与次态控制误差).** 给定时刻  $t$  及当前系统状态  $x_t$ , 后缀最优控制轨迹 (*clairvoyant optimal trajectory*) 是在知道未来各时刻真实参数  $\xi_{t:T}^*$  的前提下求得的最优轨迹, 即  $x_{t:T}^*, u_{t:T}^* := \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)$ . 进而, 动态控制器 **ALG** 在  $t$  时刻的次态控制误差 (*per-step error*) 定义为 **ALG** 提交的控制输入与后缀最优控制轨迹的首个控制输入之差, 即

$$e_t := \|u_t - u_{t|t}^*\|, \text{ 其中 } u_t = \text{ALG}(x_t, \xi_{t:t+k|t}; t), u_{t|t}^* = \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)_{v_t}.$$

特别地, 模型预测控制器  $\text{MPC}_k$  的次态控制误差可写为

$$e_t = \left\| \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k|t}; F_{t+k})_{v_t} - \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)_{v_t} \right\|.$$

我们指出, 后缀最优控制轨迹可视为一种特殊的模型预测控制器的轨迹, 其预测视野足够长以至于可持续到时刻  $T$ , 且所有预测都是准确的。这种理解方式直观地展现了  $\text{MPC}_k$  的轨迹在一定条件下与后缀最优控制轨迹相差不大的原因: 只要  $\text{MPC}_k$  的预测视野  $k$  足够大, 而预测误差  $\|\xi_{t:t+k|t} - \xi_{t:t+k}^*\|$  足够小,  $e_t$  也将有足够小的上界。这一观察将给后续的证明带来便利。

**微扰响应上界** 上一小节中, 我们直观地说明了次态控制误差上界的意义。那么, 怎样从次态控制误差的上界推出动态超额代价的上界呢? 这里的分析方法继承了前作 [48] 中的思想: 如果可以证明有限时间最优控制问题的解对初态扰动和参数扰动的响应在时间上均具有衰减的形式 (即: 扰动发生的时刻与所考察的时刻越远, 所考察时刻状态在扰动后的变化就越小), 由于次态至多从后缀最优控制轨迹偏离有限距离, 次态控制误差不会在时间上累积 (这要求微扰响应衰减得足够快), 从而轨迹的偏差也将有一上界。图 3.1 直观地展示了这种思路。

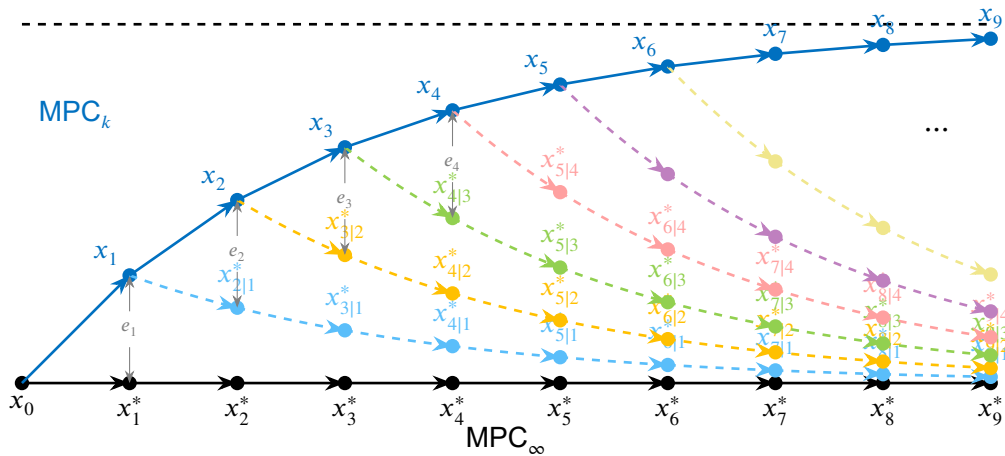


图 3.1 次态控制误差累加的直观理解: 次态控制误差不会在时间上累积

在上述分析思路中，发挥核心作用的就是所谓的微扰响应上界 (*perturbation bound*)。正如引言所述，微扰分析法在优化理论中应用颇广，其中有一些工作也涵盖了某些特定形式的有限时间最优控制问题，并得到了具有衰减特征微扰响应上界<sup>[51-52,56-57]</sup>。我们的分析框架只要求其中两种形式的微扰响应上界成立：

- ① 固定初态  $z$ ，对参数  $\xi_{t_1:t_2}$  的微扰响应：只需考察首个控制输入的响应，即

$$\left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F)_{v_{t_1}} - \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi'_{t_1:t_2}; F)_{v_{t_1}} \right\| \leq \left( \sum_{t=t_1}^{t_2} q_1(t-t_1)\delta_t \right) \|z\| + \sum_{t=t_1}^{t_2} q_2(t-t_1)\delta_t. \quad (3.1)$$

其中， $\delta_t := \|\xi_t - \xi'_t\|$  是  $t \in [t_1, t_2]$  时刻参数的扰动，函数  $q_1$ 、 $q_2$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} q_i(t) \leq C_i, \quad (i = 1, 2)$$

这里常数  $C_i \geq 1$ 。此形式的微扰响应上界可用于给出次态控制误差的上界，从而建立次态控制误差有界引理（参见引理 3.1）。

- ② 固定参数  $\xi_{t_1:t_2}$ ，对初态  $z$  的微扰响应：这时需考察各时刻状态的响应，即

$$\left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F)_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z', \xi_{t_1:t_2}; F)_{y_t/v_t} \right\| \leq q_3(t-t_1) \|z - z'\|, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (3.2)$$

其中，函数  $q_3$  满足  $\sum_{t=0}^{\infty} q_3(t) \leq C_3$ ，这里常数  $C_3 \geq 1$ 。此形式的微扰响应上界可防止次态控制误差在时间上积累（正如图 3.1 所展示的那样），从而建立次态控制误差累加引理（参见引理 3.2）。相较于 (3.1)，(3.2) 的响应上界具有更自然、更简洁的形式。

我们指出：尽管文献中给出的微扰响应上界在形式上可能略有差异，但两种上界从已有结果中大多是容易导出的。例如，许多文献中都将上述 (3.1)、(3.2) 两种微扰响应合并至一个不等式中<sup>[48,57]</sup>，这时只要分别将两种微扰之一置为 0，就得到了我们期望的上界形式。按照上述方式分解微扰相应上界，主要是为了强调其不同作用，以便于更好地理解微扰分析框架。

此外，我们对微扰响应上界的形式要求还表明 [48] 中要求的指数衰减速率并不必要，只要函数  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  衰减得足够快（例如，以不慢于二次的速度衰减），则相应的假设就可以成立，这也赋予我们的框架更广泛的应用潜力。在附录 B.8 中，我们给出了一个系统实例，其中微扰响应不可能是指数衰减的，故其中动态超额代价的上界也将减弱。当然，在大多数系统中，只要加以适当的假设，所证明的微扰响应上界仍将具有指数衰减的形式（即  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  均为指数函数）。

## 3.2 微扰分析框架

在上一节中，我们介绍了叙述微扰分析框架所需要的全部前置知识。本节将逐步带领读者构建完整的微扰分析框架。由于模型预测控制器在每一时刻都直接求解一个有限时间最优控制问题，在形式上与离线最优控制轨迹、后缀最优控制轨迹保持一致，因此在分析上也显得更加简便。出于直观性的考虑，我们将首先针对模型预测控制器给出微扰分析基本定理，随后再叙述如何拓展这一框架的应用范围，以涵盖其他类型的动态控制器。

### 3.2.1 模型预测控制器：微扰分析基本定理

针对模型预测控制器  $\text{MPC}_k$ ，图 3.2 直观地展示了我们的微扰分析框架。概而言之，我们的框架首先要求在系统中建立形如 (3.1)、(3.2) 的微扰响应上界（仅要求在一定条件下成立，详见性质 3.2）；随后，由次态控制误差有界引理（引理 3.1），可利用微扰响应上界 (3.1) 得到次态控制误差的上界；最后，借助次态控制误差累加引理（引理 3.2），便可进而得到动态超额代价的上界。我们指出：上述框架中的第一步和第三步对其他动态控制器也适用，而第二步仅对  $\text{MPC}_k$  成立（因充分利用了  $\text{MPC}_k$  与最优轨迹的形式一致性，针对  $\text{MPC}_k$  的次态控制误差有界引理在形式与证明上均较简洁），将在下一节作进一步拓展。

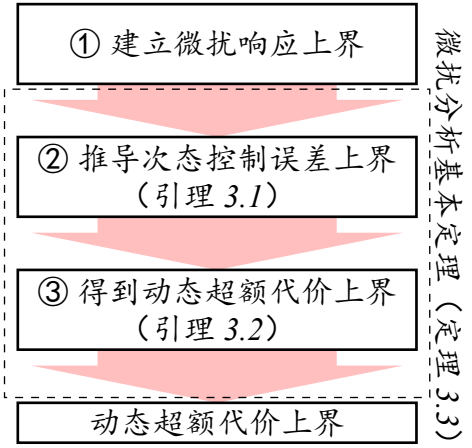


图 3.2 微扰分析框架的分步示意图（针对模型预测控制器  $\text{MPC}_k$ ）

**第一步：建立两种微扰响应上界** 微扰响应上界的具体形式与有限时间最优控制问题的具体形式关系甚密，其推导也没有一定之法，需要综合利用各类分析技巧。因此，我们在这里暂不详细探讨怎样得到微扰响应上界（本章最后将简要说明怎样在给定的系统模型下证明微扰响应上界），而将其表述为一种待证明的事实。我们将后续步骤中所需的微扰响应性质总结如下。

**性质 3.2 (系统的微扰响应性质).** 存在常数  $R > 0$ ，使得下述微扰响应上界成立：

① 在区间  $[t_1, t_2] = [t, t+k]$  上（其中  $t < T - k$ ），(3.1) 对下述参量成立：

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{B}(x_t^*, R), \quad \forall \xi_{t:t+k-1} \in \Xi_{t:t+k-1}, \quad \forall \xi_{t+k}, \xi'_{t+k} \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R); \\ \xi'_{t:t+k-1} = \xi_{t:t+k-1}^*, \quad F = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

② 在区间  $[t_1, t_2] = [t, T]$  上（其中  $t \geq T - k$ ），(3.1) 对下述参量成立：

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{B}(x_t^*, R), \quad \forall \xi_{t:T} \in \Xi_{t:T}; \\ \xi'_{t:T} = \xi^*_{t:T}, \quad F = F_T. \end{aligned}$$

③ 对任意  $z, z' \in \mathbb{B}(x_t^*, R)$ ，(3.2) 成立。

直观地说，性质 3.2 要求微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 在离线最优控制轨迹 OPT 的一个半径为  $R$  的邻域内成立，这比此前许多工作（如 [48] 等）所证明的全局微扰响应上界要宽松不少。之所以做出较宽松的假设，是因为我们希望框架具有尽可能强的通用性。事实上，在一般的非线性系统或带有约束集的系统，考虑到优化问题的解在奇点附近和边界上的性质，一般不能期望全局微扰上界在这些系统中成立（在附录 B.8 中就给出了一个带约束集的简单实例），因此只能退而求其次，证明局部成立的微扰响应上界。

**第二步：推导次态控制误差  $e_t$  的上界** 这一步的核心是应用微扰响应上界 (3.1)，导出次态控制误差  $e_t$  的上界。读者应注意该步骤依赖  $\text{MPC}_k$  的特定形式，而不能简单推广至其他动态控制器。仅就  $\text{MPC}_k$  控制器而言，在假定性质 3.2 成立时，我们可以用一种通用的方式简便地完成这一步。我们将结果总结为针对  $\text{MPC}_k$  控制器的次态控制误差有界引理（引理 3.1）。

**引理 3.1 (MPC<sub>k</sub> 的次态控制误差有界引理)**. 在性质 3.1、性质 3.2 成立的前提下，若当前状态  $x_t \in \mathbb{B}(x_t^*, \frac{R}{C_3})$ ，而对一切  $t < T - k$ ， $\text{MPC}_k$  的终端代价函数  $F_{t+k}$  都被设为某些  $\bar{y}(\xi_{t+k|t}) \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  的指示函数，则  $\text{MPC}_k$  的次态控制误差有上界

$$e_t \leq \sum_{\tau=0}^k \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau) \right) \rho_{t,\tau} + 2R \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(k) + q_2(k) \right). \quad (3.3)$$

**证明.** 该引理是微扰响应上界 (3.1) 的直接推论。事实上，对一切  $t < T - k$ ，注意到次态控制误差  $e_t$  有上界

$$e_t = \left\| \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1|t}, \bar{y}(\xi_{t+k|t}); \mathbb{I})_{v_t} - \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)_{v_t} \right\| \quad (3.4a)$$

$$= \left\| \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1|t}, \bar{y}(\xi_{t+k|t}); \mathbb{I})_{v_t} - \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1}^*, x_{t+k|t}^*; \mathbb{I})_{v_t} \right\| \quad (3.4b)$$

$$\leq \sum_{\tau=0}^{k-1} (\|x_t\| \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) \rho_{t,\tau} + (\|x_t\| \cdot q_1(k) + q_2(k)) \left\| \bar{y}(\xi_{t+k|t}) - x_{t+k|t}^* \right\|. \quad (3.4c)$$

其中，为将 (3.4a) 变形为 (3.4b)，仅需注意到最优性原理 (*principle of optimality*)

保证从  $x_t$  到  $x_{t+k|t}^*$ （解对应的有限时间最优控制问题所得的）最优路径与  $x_t$  起的后缀最优控制轨迹完全重合；而（3.4c）直接应用了微扰响应上界（3.1）。

注意到题设  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$  及性质 3.1 保证了  $\|x_t\| \leq \frac{R}{C_3} + D_{x^*}$ ，题设保证了  $\bar{y}(\xi_{t+k|t}) \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*; R)$ ，而性质 3.2 保证了  $x_{t+k|t}^* \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*; R)$ 。因此，利用三角不等式，即证明了（3.4）对一切  $t < T - k$  成立。

类似地，对一切  $t \geq T - k$ ，注意到次态控制误差有上界

$$e_t = \|\psi_t^T(x_t, \xi_{t:T|t}; F_T) - \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)\| \quad (3.5a)$$

$$\leq \sum_{\tau=0}^k (\|x_t\| \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) \rho_{t,\tau} \quad (3.5b)$$

$$\leq \sum_{\tau=0}^k \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau) \right) \rho_{t,\tau} \quad (3.5c)$$

其中，（3.5a）是次态控制误差对  $\text{MPC}_k$  的定义；（3.5b）是微扰响应上界（3.1）的直接应用（见性质 3.2）；在（3.5c）中，题设保证了  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$ ，而性质 3.1 保证了  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$ （我们约定，对一切  $t + \tau > T$ ，恒有  $\rho_{t,\tau} \equiv 0$ ）。因此，（3.4）对一切  $t \geq T - k$  也成立。这就完成了证明。 ■

**第三步：从  $\sum_{t=0}^{T-1} e_t^2$  的上界推出动态超额代价上界** 分析框架的第三步依赖于局部成立的微扰响应上界（3.2）（具体而言，是在离线最优控制轨迹  $\text{OPT}$  周围半径为  $R$  的邻域内成立）。只要次态控制误差足够小，动态控制器给出的次态就将保持在  $\text{OPT}$  的邻域内，从而可以递归地利用上一节中给出的思路，求得动态超额代价的上界。我们将结果总结为下述的次态控制误差累加引理（引理 3.2），应注意其对一切动态控制器  $\text{ALG}$  都适用，而不仅局限于  $\text{MPC}_k$ 。

**引理 3.2 (次态控制误差累加引理).** 在性质 3.1、性质 3.2 成立的前提下，对一切时刻  $t$ ，若动态控制器  $\text{ALG}$  在  $t$  时刻前的次态控制误差都满足  $e_\tau \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$  ( $\forall \tau < t$ )，则  $\text{ALG}$  控制轨迹上  $t$  时刻的状态与离线最优控制轨迹  $\text{OPT}$  上  $t$  时刻的状态将足够接近，即  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$ 。进而，若对一切  $t < T$  都有  $e_t \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$ ，则  $\text{ALG}$  满足

$$\sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \leq (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2, \quad (3.6)$$

进而可推知  $\text{ALG}$  的动态超额代价满足

$$\text{cost}(\text{ALG}) - \text{cost}(\text{OPT}) = O \left( \sqrt{\text{cost}(\text{OPT}) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2 + \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2} \right). \quad (3.7)$$

**证明.** 由于引理的证明仅用到微扰响应上界 (3.2), 为使记号简洁, 在不致引起混淆的前提下, 约定将  $\psi_t^T(z, \xi_{t:T}^*; F_T)$  简写为  $\psi_t^T(z)$ 。注意到: 在任意的时刻  $t$ , 动力学函数的 Lipschitz 连续性保证了

$$\begin{aligned} \left\| x_{t+1} - \psi_t^T(x_t)_{y_{t+1}} \right\| &= \left\| g_t(x_t, u_t; \xi_t) - g_t(x_t, \psi_t^T(x_t)_{v_t}; \xi_t) \right\| \\ &\leq L_g \left\| u_t - \psi_t^T(x_t)_{v_t} \right\| \leq L_g e_t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

下面证明: 若  $e_\tau \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$  ( $\forall \tau < t$ ), 则  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$ 。对  $t$  用数学归纳法。对于  $t = 0$  的奠基步, 显然有  $x_0^* = x_0$ , 故命题成立。假设命题对  $t - 1$  及之前的各时刻都成立, 则对  $t$  时刻有

$$\begin{aligned} \|x_t - x_t^*\| &= \left\| x_t - \psi_0^T(x_0)_{y_t} \right\| \\ &\leq \left\| x_t - \psi_{t-1}^T(x_{t-1})_{y_t} \right\| + \sum_{i=1}^{t-1} \left\| \psi_{t-i}^T(x_{t-i})_{y_t} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_t} \right\| \\ &\leq \left\| x_t - \psi_{t-1}^T(x_{t-1})_{y_t} \right\| + \sum_{i=1}^{t-1} q_3(i) \left\| x_{t-i} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}} \right\| \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \left\| x_{t-i} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}} \right\| \quad (3.9b)$$

$$\leq L_g \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}. \quad (3.9c)$$

其中, (3.9a) 用到了微扰响应上界 (3.2) (参见性质 3.2), (3.9b) 用到了  $q_3(0) \geq 1$ , 而 (3.9c) 用到了 (3.8)。为说明可以在 (3.9a) 中应用 (3.2) 的原因, 注意到: 由归纳假设, 对一切  $i \in [1, t-1]$  都有  $x_{t-i-1} \in \mathbb{B}\left(x_{t-i-1}^*, \frac{R}{C_3}\right)$ , 结合  $q_3(1) \leq \sum_{\tau=0}^{\infty} q_3(\tau) \leq C_3$  即得到  $\psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}} \in \mathbb{B}\left(x_{t-i}^*, R\right)$ 。因此,  $\psi_{t-i}^T(x_{t-i})$  和  $\psi_{t-i}^T\left(\psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}}\right)$  满足性质 3.2 中要求的参量条件, 可以应用微扰响应上界 (3.2), 其中最优化原理又保证了后者恰为  $\psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_t}$ 。进而, 将  $e_{t-i} \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$  代入 (3.9), 即得

$$\|x_t - x_t^*\| \leq L_g \cdot \frac{R}{C_3^2 L_g} \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \leq \frac{R}{C_3}.$$

这就完成了归纳步  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$ , 故命题成立。此外还可得到上述命题的一个显然推论: 若  $e_\tau \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$  ( $\forall \tau < t$ ), 则  $x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right)$ 。



类似地，对  $u_t$  也有相应的命题：若  $e_\tau \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$  ( $\forall \tau < t$ )，则

$$\begin{aligned}
\|u_t - u_t^*\| &= \|u_t - \psi_0^T(x_0)_{v_t}\| \\
&\leq \|u_t - \psi_t^T(x_t)_{v_t}\| + \sum_{i=0}^{t-1} \|\psi_{t-i}^T(x_{t-i})_{v_t} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{v_t}\| \\
&\leq \|u_t - \psi_t^T(x_t)_{v_t}\| + \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \|x_{t-i} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}}\| \\
&\leq e_t + L_g \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

上述不等式成立的原因与 (3.9a) 相同，这里不再赘述。

利用式 (3.9) 和 (3.10)，可直接推知

$$\begin{aligned}
\|x_t - x_t^*\|^2 &\leq L_g^2 \left( \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1} \right)^2 \\
&\leq L_g^2 \left( \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right) \tag{3.11a}
\end{aligned}$$

$$\leq C_3 L_g^2 \left( \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right), \tag{3.11b}$$

$$\begin{aligned}
\|u_t - u_t^*\|^2 &\leq \left( e_t + L_g \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1} \right)^2 \\
&\leq \left( 1 + L_g \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \right) \cdot \left( e_t^2 + \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right) \tag{3.12a}
\end{aligned}$$

$$\leq (1 + C_3 L_g^2) \cdot \left( e_t^2 + \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right), \tag{3.12b}$$

其中 (3.11a)、(3.12a) 用到 Cauchy-Schwarz 不等式，而 (3.11b)、(3.12b) 用到假设  $\sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) \leq C_3$ 。将 (3.11) 和 (3.12) 对时刻  $t$  求和，即得到

$$\sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_3 L_g^2 \sum_{t=1}^T \left( \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right) + (1 + C_3 L_g^2) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left( e_t^2 + \sum_{i=0}^{t-1} q_3(i) e_{t-i-1}^2 \right) \\
&\leq (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到  $\sum_{j=0}^{\infty} q_3(j) \leq C_3$ 。

由于阶段代价函数  $f_t$  和终端代价函数  $F_T$  都是良态函数，因此可以对其应用引理 B.7。具体而言，对任意  $\eta > 0$ ，都有

$$\begin{aligned}
&\text{cost(ALG)} - \text{cost(OPT)} \\
&\leq \left( \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t, u_t; \xi_t^*) + F_T(x_T; \xi_T^*) \right) - \left( \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t^*, u_t^*; \xi_t^*) + F_T(x_T^*; \xi_T^*) \right) \\
&\leq \eta \left( \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t^*, u_t^*; \xi_t^*) + F_T(x_T^*; \xi_T^*) \right) \\
&\quad + \frac{\ell}{2} \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \left( \sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \right) \tag{3.14a}
\end{aligned}$$

$$\leq \eta \cdot \text{cost(OPT)} + \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \cdot \frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2 \tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta \cdot \text{cost(OPT)} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2 \\
&\quad + \frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2. \tag{3.14c}
\end{aligned}$$

其中，(3.14a) 用到 (B.12)，而 (3.14b) 用到 (3.13)。适当选取可调节的参数  $\eta$ ，使 (3.14c) 的右端最小，即取

$$\eta = \left( \frac{\frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2}{\text{cost(OPT)}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

则最终得到

$$\text{cost(ALG)} - \text{cost(OPT)} \leq \sqrt{\left( \frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \right) \cdot \text{cost(OPT)} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2}$$

$$+ \frac{\ell}{2} \cdot (1 + 2C_3 L_g^2) \cdot (1 + C_3) \cdot \sum_{i=0}^{T-1} e_i^2. \quad (3.15)$$

这就完成了证明。 ■

**MPC<sub>k</sub> 的微扰分析基本定理** 为了方便应用，我们将上述次态控制误差有界引理（第二步）和次态控制误差累加引理（第三步）合并，就得到下面的定理 3.3，称之为 MPC<sub>k</sub> 的微扰分析基本定理。概而言之，这一定理表明：对 MPC<sub>k</sub> 控制器而言，当预测视野  $k$  足够长，而预测误差  $\rho_{t,\tau}$  足够小时，引理 3.1 和引理 3.2 共同保证了 MPC<sub>k</sub> 的控制轨迹不会离开离线最优控制轨迹附近半径为  $\frac{R}{C_3}$  的邻域；在代价函数为良态函数的假设下，即可进而证明其动态超额代价有上界。

**定理 3.3 (MPC<sub>k</sub> 的微扰分析基本定理).** 在性质 3.1、性质 3.2 成立的前提下，若对一切  $t < T - k$ ，MPC<sub>k</sub> 的终端代价函数  $F_{t+k}$  都被设为某些  $\bar{y}(\xi_{t+k|t}) \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  的指示函数，同时预测视野  $k$  足够长、而预测误差  $\rho_{t,\tau}$  足够小，使得下式成立

$$\sum_{\tau=0}^k \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau) \right) \rho_{t,\tau} + 2R \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(k) + q_2(k) \right) \leq \frac{R}{C_3^2 L_g},$$

则 MPC<sub>k</sub> 的控制轨迹将保持在 OPT 附近，即对一切时刻  $t$  都有  $x_t \in \mathbb{B}(x_t^*, \frac{R}{C_3})$ 。进而，MPC<sub>k</sub> 的动态超额代价有上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) = O\left(\sqrt{\text{cost}(\text{OPT}) \cdot E} + E\right), \quad (3.16)$$

其中  $E = O\left(\sum_{\tau=0}^{k-1} (q_1(\tau) + q_2(\tau)) P(\tau) + (q_1(k)^2 + q_2(k)^2) T\right)$ 。

**证明.** 我们用归纳法证明：对一切时刻  $t < T$ ，MPC<sub>k</sub> 的轨迹都满足下述性质：

$$x_t \in \mathbb{B}\left(x_t^*, \frac{R}{C_3}\right), \quad (3.17a)$$

$$e_t \leq \sum_{\tau=0}^k \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau) \right) \rho_{t,\tau} + 2R \left( \left( \frac{R}{C_3} + D_{x^*} \right) \cdot q_1(k) + q_2(k) \right). \quad (3.17b)$$

对于  $t = 0$  的奠基步，显然有  $x_0 = x_0^*$ ，故 (3.17a) 成立；而引理 3.1 保证了 (3.17b) 成立，故命题成立。假设命题对一切  $\tau < t$  都成立，考虑  $t$  时刻的情形。据题设和归纳假设 (3.17b)，对一切  $\tau < t$  恒有  $e_\tau \leq \frac{R}{C_3^2 L_g}$ 。因此，引理 3.2 保证 (3.17a) 在  $t$  时刻成立；进而，由于 MPC<sub>k</sub> 的终端代价  $F_{t+k}$  取为  $\bar{y}(\xi_{t+k|t})$  的指示函数，故引理 3.1 保证了 (3.17b) 在  $t$  时刻也成立。这就完成了命题的归纳证明。

令  $R_0 := \frac{R}{C_3} + D_{x^*}$ 。注意到 (3.17b) 保证了

$$e_t^2 \leq \left( \sum_{\tau=0}^k (R_0 \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) + 2R(R_0 + 1) \right) \cdot \left( \sum_{\tau=0}^k (R_0 \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) \rho_{t,\tau}^2 + 2R(R_0 \cdot q_1(k)^2 + q_2(k)^2) \right) \quad (3.18a)$$

$$\leq (R_0 C_1 + C_2 + 2R(R_0 + 1)) \cdot \left( \sum_{\tau=0}^{k-1} (R_0 \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) \rho_{t,\tau}^2 + (2R + 1)(R_0 \cdot q_1(k)^2 + q_2(k)^2) \right), \quad (3.18b)$$

其中 (3.18a) 用到 Cauchy-Schwarz 不等式, 而 (3.18b) 用到了上界  $\sum_{\tau=0}^k q_1(\tau) \leq C_1$ 、 $\sum_{\tau=0}^k q_2(\tau) \leq C_2$  及  $\rho_{t,\tau} \leq 1$ 。由于 (3.17) 和 (3.18) 都对一切  $t < T$  成立, 因此利用引理 3.2, 即得到

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq \sqrt{\text{cost}(\text{OPT}) \cdot E} + E,$$

其中

$$E := (R_0 C_1 + C_2 + 2R(R_0 + 1)) \cdot \left( \sum_{\tau=0}^{k-1} (R_0 \cdot q_1(\tau) + q_2(\tau)) P(\tau) + (2R + 1)(R_0 \cdot q_1(k)^2 + q_2(k)^2) T \right).$$

这就完成了证明。 ■

为更直观地理解 (3.16) 给出的动态超额代价上界, 我们指出: 在系统的基本性质成立时, 可以证明  $\text{cost}(\text{OPT}) = O(T)$ , 故  $\text{MPC}_k$  的动态超额代价不超过  $O(\sqrt{TE} + E)$ ; 进而, 当预测误差为 0 时,  $\text{MPC}_k$  的动态超额代价有上界  $O((q_1(k) + q_2(k)) \cdot T)$ , (在阶数上) 复现并推广了 [48] 中的结果。显然, 预测误差越大, 动态超额代价的上界就越差; 而当预测误差足够小 (表现为  $\tau$  步后的平方加总预测强度  $P(\tau)$  足够小), 且预测视野  $k = \Omega(\ln T)$  足够长时, 动态超额代价的上界将达到  $o(T)$  的数量级, 即  $\text{MPC}_k$  总能取得关于  $T$  的亚线性动态超额代价。

### 3.2.2 带预测的动态控制器: 框架的一般化

在上一小节中, 我们曾多次明确指出: 由于推导次态控制误差有界引理时利用了  $\text{MPC}_k$  在设计上的特性, 因此  $\text{MPC}_k$  的次态控制误差有界引理 (引理 3.1) 不适用于一般的动态控制器。然而, 我们还可以用其他方法从微扰响应上界导出

次态控制误差的上界，替换第二步后的分析框架如下图 3.3 所示。

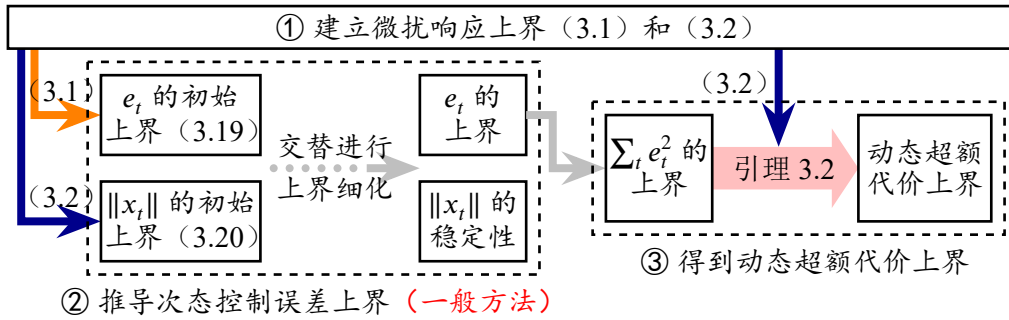


图 3.3 微扰分析框架的分步示意图（针对一般动态控制器 ALG）

**重构的第二步：上界的交替细化** 对于一般的动态控制器 ALG 而言，只要能写出其次态控制误差和沿控制轨迹各时刻状态的上界，就有可能借助微扰响应上界，得到  $\|x_t\|$  的稳定性和  $e_t$  的常数上界。一种一般化的分析思路如下：

- ① 利用微扰响应上界 (3.1)，得到次态控制误差  $e_t$  的初始上界，其中一般含有  $\|x_t\|$  和其他有界项。通常， $e_t$  的初始上界具有形式

$$e_t \leq (p_1 + \theta_1(k)) \|x_t\| + (p_2 + \theta_2(k)). \quad (3.19)$$

其中， $p_1$ 、 $p_2$  项通常与预测误差  $\rho_{t,\tau}$  有关， $\theta_1(k)$ 、 $\theta_2(k)$  则通常与扰动响应上界中的衰减系数有关。

- ② 利用微扰响应上界 (3.2)，得到系统状态  $\|x_t\|$  的初始上界，其中一般含有  $\{e_\tau\}_{\tau < t}$  和其他有界项。通常， $\|x_t\|$  的初始上界具有形式

$$\|x_t\| \leq O \left( \sum_{\tau=0}^{t-1} \theta(\tau) e_{t-1-\tau} \right) + \text{常数}. \quad (3.20)$$

其中， $\theta(\tau)$  与扰动响应上界中的衰减系数有关。

- ③ 交替进行上界细化，得到  $e_t$ 、 $\|x_t\|$  之间相互独立的常数上界。在①、②中，我们已经得到了  $e_t$ 、 $\|x_t\|$  之间相互耦合的初始上界。这时，将  $e_t$ 、 $\|x_t\|$  的初始上界交替代入（特别地，在上述形式下，可将  $e_t$  的初始上界代入  $\|x_t\|$  的初始上界），可设法得到  $\|x_t\|$  关于  $\{\|x_\tau\|\}_{\tau=0}^{t-1}$  的递归上界，其中不等式右端的  $\|x_0\|, \dots, \|x_{t-1}\|$  等各项前会出现扰动响应上界中的衰减系数。这时，只要衰减速率取得足够快（通常可将预测视野  $k$  取得足够大来实现），就可以归纳地证明 ALG 轨迹的稳定性，再将  $\|x_t\|$  的常数上界代回  $e_t$  的初始上界得到  $e_t$  的常数上界。通常， $\|x_t\|$  和  $e_t$  的常数上界具有形式

$$\|x_t\| \leq \text{常数}, \quad e_t \leq p_3 + \theta_3(k). \quad (3.21)$$

其中,  $p_3$  是与预测误差  $\rho_{t,\tau}$  有关的项,  $\theta_3(k)$  是随预测视野  $k$  的增大而递减至趋于 0 的衰减项。

**例 3.1 (仅噪声预测含误差的线性时变系统).** 为了演示如何对一般的动态控制器应用第二步中交替细化上界的思路, 我们以仅噪声预测含误差的线性时变系统为例。设系统的动力学方程为  $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t(\xi_t^*)$ , 其中函数  $w_t(\xi_t)$  关于  $\xi_t$  是  $L_w$ -Lipschitz 连续的, 且  $\|w_t(\xi_t)\| \leq D_w, \forall \xi_t \in \Xi_t$ 。可以证明, 该系统中的微扰响应上界具有随时间距离指数衰减的系数 (参见定理 B.10)。因此对  $t < T - k$  有

$$\begin{aligned} e_t &= \left\| \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1|t}, 0; \mathbb{I})_{v_t} - \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T}^*; F_T)_{v_t} \right\| \\ &= \left\| \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1|t}, 0; \mathbb{I})_{v_t} - \psi_t^{t+k}(x_t, \xi_{t:t+k-1}^*, x_{t+k|t}^*; \mathbb{I})_{v_t} \right\| \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\leq C \left( \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \|w_{t+\tau}(\xi_{t+\tau|t}) - w_{t+\tau}(\xi_{t+\tau}^*)\| + \lambda^k \|x_{t+k|t}^*\| \right) \quad (3.22b)$$

$$\leq C \left( L_w \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau} + \lambda^k \|x_{t+k|t}^*\| \right). \quad (3.22c)$$

其中, (3.22a) 用到最优性原理, (3.22b) 用到微扰响应上界 (3.1), (3.22c) 用到  $w_t(\xi_t)$  的 Lipschitz 连续性。注意到

$$\begin{aligned} \|x_{t+k|t}^*\| &\leq \|x_{t+k|t}^* - x_{t+k}^*\| + \|x_{t+k}^*\| \\ &= \left\| \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T-1}^*; F_T)_{y_{t+k}} - \psi_t^T(x_t^*, \xi_{t:T-1}^*; F_T)_{y_{t+k}} \right\| + \|x_{t+k}^*\| \\ &\leq C \lambda^k \|x_t - x_t^*\| + \|x_{t+k}^*\|, \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中最后一个不等号用到用到微扰响应上界 (3.2)。将 (3.23) 代入 (3.22) 得

$$\begin{aligned} e_t &\leq C \left( C \lambda^{2k} \|x_t - x_t^*\| + L_w \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau} + \lambda^k \|x_{t+k}^*\| \right) \\ &\leq C^2 \lambda^{2k} \|x_t\| + \frac{CL_w}{1-\lambda} + C^2 \lambda^{2k} \|x_t^*\| + C \lambda^k \|x_{t+k}^*\| \\ &\leq C^2 \lambda^{2k} \|x_t\| + \frac{CL_w}{1-\lambda} + C^2(1+C) \lambda^{t+2k} \|x_{\text{init}}\| + \frac{2C^2 D_w \lambda^k}{1-\lambda} \\ &\leq C^2 \lambda^{2k} \|x_t\| + C^2(1+C) \lambda^{t+2k} \|x_{\text{init}}\| + \frac{CL_w + 2C^2 D_w}{1-\lambda}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

对  $t \geq T - k$ , 据  $\text{MPC}_k$  的设计, 相应的上界更加简洁, 即有

$$e_t = \left\| \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T-1|t}; F_T)_{v_t} - \psi_t^T(x_t, \xi_{t:T-1}^*; F_T)_{v_t} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \|w_{t+\tau}(\xi_{t+\tau|t}) - w_{t+\tau}(\xi_{t+\tau}^*)\| \\
&\leq CL_w \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau} \leq \frac{CL_w}{1-\lambda}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

(3.24) 和 (3.25) 就是  $e_t$  的初始上界，其右边具有所期望的形式。

另一方面，我们将  $x_t$  视为  $\psi_t^T(x_t)_{y_t}$ （为使记号简洁，在不致引起混淆时，将  $\psi_t^T(z, \xi_{t:T}^*; F_T)$  简写为  $\psi_t^T(z)$ ），并对子问题的控制时长裂项求和，即可得到

$$\begin{aligned}
\|x_t\| &\leq \|x_t - \psi_{t-1}^T(x_{t-1})_{y_t}\| + \sum_{i=1}^{k-1} \|\psi_{t-i}^T(x_{t-i})_{y_t} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_t}\| + \|\psi_{t-k}^T(x_{t-k})_{y_t}\| \\
&\leq C \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \|x_{t-i} - \psi_{t-i-1}^T(x_{t-i-1})_{y_{t-i}}\| + C\lambda^k \|x_{t-k}\| + \frac{2CD_w}{1-\lambda} \\
&= CL_g \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} e_{t-i} + C\lambda^k \|x_{t-k}\| + \frac{2CD_w}{1-\lambda}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

上式 (3.26) 就是  $\|x_t\|$  的初始上界，其右边同样具有所期望的形式。

将 (3.24)、(3.25) 代入 (3.26)，即得  $\|x_t\|$  的递归上界

$$\begin{aligned}
\|x_t\| &\leq C^3 L_g \lambda^{2k} \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} \|x_{t-i}\| + C\lambda^k \|x_{t-k}\| + C^3 L_g (1+C) \cdot k \lambda^{t+2k-1} \|x_{\text{init}}\| \\
&\quad + \frac{C^2 L_g (L_w + 2CD_w) + 2CD_w (1-\lambda)}{(1-\lambda)^2}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

若取足够大的预测视野  $k$ ，使得

$$\begin{aligned}
\frac{C^3 L_g}{1-\sqrt{\lambda}} \cdot \lambda^{2k-1} + C\lambda^{\frac{k}{2}} + C^3 L_g (1+C) \cdot k \lambda^{2k-1} &\leq 1, \\
\frac{C^3 L_g}{1-\lambda} \cdot \lambda^{2k} + C\lambda^k &\leq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

同时成立，则用数学归纳法容易证明

$$\|x_t\| \leq \lambda^{\frac{t}{2}} \|x_{\text{init}}\| + \frac{2C^2 L_g (L_w + 2CD_w) + 4CD_w (1-\lambda)}{(1-\lambda)^2}, \tag{3.28}$$

这就证明了 **ALG** 的稳定性（即  $\|x_t\|$  具有常数上界）。最后，将  $\|x_t\|$  的常数上界代回  $e_t$  的初始上界，即得  $e_t$  的常数上界。

为了方便应用次态控制误差累加引理，我们也可以直接给出  $\sum_{t=0}^{T-1} e_t^2$  的上界。

注意到对  $t < T - k$  恒有

$$\begin{aligned}
e_t^2 &\leq C^2 \left( C\lambda^{2k} \|x_t - x_t^*\| + L_w \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau} + \lambda^k \|x_{t+k}^*\| \right)^2 \\
&\leq C^2 \left( C\lambda^{2k} + L_w^2 \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau + 1 \right) \cdot \left( C\lambda^{2k} \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau}^2 + \lambda^{2k} \|x_{t+k}^*\|^2 \right) \\
&\leq C^2 \left( 1 + C + \frac{L_w^2}{1 - \lambda} \right) \cdot \left( C\lambda^{2k} \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau}^2 + \lambda^{2k} \|x_{t+k}^*\|^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

而对  $t \geq T - k$  则有

$$\begin{aligned}
e_t^2 &\leq C^2 L_w^2 \left( \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau} \right)^2 \\
&\leq C^2 L_w^2 \left( \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \right) \left( \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau}^2 \right) \\
&\leq \frac{C^2 L_w^2}{1 - \lambda} \cdot \sum_{\tau=0}^{T-t-1} \lambda^\tau \rho_{t,\tau}^2.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

因此，将 (3.29)、(3.30) 对  $t$  求和，即得

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1} e_t^2 &\leq C^3 \left( 1 + C + \frac{L_w^2}{1 - \lambda} \right) \cdot \lambda^{2k} \cdot \sum_{t=1}^{T-k} \|x_t - x_t^*\|^2 \\
&\quad + C^2 \left( 1 + C + \frac{L_w^2}{1 - \lambda} \right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda^\tau \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \rho_{t,\tau}^2 \\
&\quad + C^2 \cdot \lambda^{2k} \cdot \sum_{t=k}^{T-1} \|x_t^*\|^2.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

作放缩  $\|x_t - x_t^*\|^2 \leq 2(\|x_t\|^2 + \|x_t^*\|^2)$ ，并代入  $\|x_t\|$  的常数上界 (3.28)，即得到  $\sum_{t=0}^{T-1} e_t^2$  的上界。这就完成了一般框架中的第二步分析。 ■

我们指出：用本节中所述方法得到  $\sum_{t=0}^{T-1} e_t^2$  的上界，虽然不如直接套用次态控制误差有界定理简便，但所得上界相对更紧，并且也不用设法保证终端代价的参考状态足够接近 **OPT**，因此得到的性能保证更具一般性。然而，这种方法毕竟相对繁复，也没有定法可循，给框架的应用带来了不便。考虑到本文后续将着重分析模型预测控制器  $\text{MPC}_k$  的性能保证，除非另行说明，我们不再采用本节所述



的一般分析思路。感兴趣的读者可以自行比较两种方法得到的上界有何不同。

至此，我们就完成了微扰分析框架的叙述。在之后各章中，我们将在不同的系统模型中，应用上述框架得到模型预测控制器  $MPC_k$  的性能保证。

### 3.3 得到微扰响应上界的常用方法

前述各节中，我们总是假设微扰响应上界成立，但没有讨论怎样得到微扰响应上界。事实上，对于不同形式的系统模型，得到微扰上界的方法也各不相同，需要综合利用系统特性和各种分析技巧。这里介绍几种常见的思路：

- 直接写出最优控制问题 (2.1) 的显式解 (包括闭式解或递推解)。这种方法一般只适用于线性二次型调节器 (*linear quadratic regulator, LQR*) 等形式较简单的系统。在带仿射约束的时变线性二次型调节器系统 (参见 [51]) 及含一般预测误差的时变线性二次型调节器系统 (参见 5.2 节) 中得到微扰响应上界，都是利用了这一方法。
- 将最优控制问题 (2.1) 规约至无约束的光滑在线凸优化问题。这种方法是为了排除由动力学方程引入的等式约束，从而可以利用无约束问题的微分学性质得到微扰响应上界，因此一般只适用于无约束的系统。在无约束的时变线性系统中可以利用这一方法得到微扰响应上界 (参见 [48] 和 4.1 节)。
- 将最优控制问题 (2.1) 作为约束优化问题求解。这种方法最直接，适用范围最广，但对分析技巧的要求也最高。通常，对于含约束的优化问题，可以写出其 Lagrangian 量  $\mathcal{L}$ ，然后对其 Hessian 矩阵作分析得到微扰响应上界。在时变非线性系统中得到微扰响应上界 (参见 4.2 节) 将利用这一方法。

在处理不同的系统模型时，需要结合系统的特性灵活运用上述分析方法。

我们特别指出：优化问题的局部耦合性质 (*local coupling property*) 常可导出指数衰减的微扰响应上界。这是因为，由最优化条件 (如 KKT 条件) 可以推出微小扰动满足的局部线性化方程，其系数矩阵与 Lagrangian 量的 Hessian 矩阵有关，而局部耦合性质使 Hessian 矩阵为分块带状矩阵，因此通过带状矩阵求逆的性质 (参见 B.1.1 节) 就能得到指数衰减的微扰响应上界。

还需要指出：建立流水线式的微扰分析框架，就是为了能简便地将已有的微扰响应上界转化为控制器的性能保证，因此在文献中已有可用的微扰响应上界时 [48,51-52,56-57]，不妨直接应用。

附录 B.1 总结了得到微扰响应上界时常用的一些技术性结果。

## 第 4 章 模型预测控制在预测不含误差时的性能分析

从本章开始，我们将由浅入深地展示如何在具体的系统模型中应用微扰分析基本定理，得到模型预测控制器的性能保证。本章中，我们将分析最简单的一类系统模型，其中不含预测误差和约束条件。我们首先考虑线性时变系统，尝试在新的微扰分析框架下复现 [48] 中的结果；随后，我们将结果进一步推广至非线性时变系统。本章将着重展示如何在具体系统中使用不同的分析技术得到微扰响应上界，这些实例可以加深对 3.3 节所作讨论的理解。

由于本章的系统模型均不含预测误差，为使记号简洁，约定所有参数  $\xi^*$  均略去不写，并约定参数的取值空间  $\Xi_t \equiv \{\xi_t^*\}$ 。

### 4.1 不含预测误差的线性时变系统

首先考虑时变系统中最简单的一种情形，即不含预测误差的线性时变系统。作为 (2.1) 的特例，该最优控制问题可表示为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t) + f_t^u(u_t)) + F_T(x_T) \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

假设 4.1 列举了所需的全部系统假设。

**假设 4.1.** 最优控制问题 (4.1) 满足下述假设：

- **代价函数：**对一切时刻  $t$ ，阶段代价函数  $f_t^x(x_t, u_t)$ 、 $f_t^u(x_t, u_t)$  以及终端代价函数  $F_T(x_T)$  都是二阶连续可微的非负函数，且具有  $\mu$ -强凸性和  $\ell$ -光滑性。不失一般性，不妨假设其极小值点均为 0。
- **动力系统：**对一切时刻  $t$ ，系统的动力学矩阵满足  $\|A_t\| \leq a$ 、 $\|B_t\| \leq b$  和  $\|B_t^\dagger\| \leq b'$ ，其中  $B_t^\dagger$  表示矩阵  $B_t$  的 Moore-Penrose 广义逆；各时刻的噪声  $w_t$  都是有界的（即存在常数  $D_w > 0$ ，使得对一切时刻  $t$  都有  $\|w_t\| \leq D_w$ ）；同时，系统是  $\sigma$ -一致可控的，且可控性指数为  $d$ 。

此时，可以证明 OPT 的稳定性，即存在常数  $D_{x^*} > 0$ ，使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  ( $\forall t$ )。

<sup>①</sup> 为使记号简洁，同时照顾使用习惯，这里用  $w_t$  代替  $w_t(\xi_t^*)$ 。

在假设 4.1 下, 性质 3.1 显然成立, 且可以证明: 存在常数  $H_1 \geq 1$ 、 $\lambda_1 \in (0, 1)$ , 使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 全局成立 (而不局限在某个邻域内), 其中

$$q_1(t) = 0, \quad q_2(t) = H_1 \lambda_1^t, \quad q_3(t) = H_1 \lambda_1^t.$$

特别地, 令  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{L_g H_1^3}{(1-\lambda_1)^3} \right\}$ , 则性质 3.2 关于半径  $R$  成立。这时, 对于带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器, 可以在该系统模型下应用定理 3.3, 得到下面的动态超额代价上界。

**定理 4.1.** 对满足假设 4.1 的最优控制问题 (4.1), 若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \ln \left( \frac{2H_1^3 L_g}{(1-\lambda_1)^2} \right) / \ln(1/\lambda_1) = O(1),$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O(\lambda_1^k T).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明, 可参见附录 B.2。我们指出: 上述定理在新的框架下成功复现了 [48] 中的主要结果, 并且在结果的阶上保持一致。

## 4.2 不含预测误差的非线性时变系统

本节继续推广上一节中的结果, 考虑不含预测误差的非线性时变系统。作为 (2.1) 的特例, 该最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} & \underset{x_0: T, u_0: T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} f_t(x_t, u_t) + F_T(x_T) \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = g_t(x_t, u_t), \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

假设 4.2 列举了所需的全部系统假设。

**假设 4.2.** 最优控制问题 (4.2) 满足下述假设:

- **代价函数:** 对一切时刻  $t$ , 阶段代价函数  $f_t(x_t, u_t)$  和终端代价函数  $F_T(x_T)$  都是二阶连续可微的非负函数, 且具有  $\mu$ -强凸性和  $l$ -光滑性。不失一般性, 不妨假设其极小值点均为 0。
- **动力系统:** 对一切时刻  $t$ , 动力学方程  $g_t$  关于  $(x_t, u_t)$  都是  $L_g$ -Lipshitz 连续的, 且是  $l$ -光滑的; 各时刻动力学方程关于阶段代价函数的极值点漂移量有充分小的上界 (即  $\|g_t(0, 0)\| \leq \frac{D_z}{\sqrt{T}}$ ); 同时, 各时刻的真实系统和可能的

预测系统都是  $\sigma$ -一致可控的，且可控性指数为  $d$ 。

- **OPT 的稳定性：**存在常数  $D_{x^*} > 0$ ，使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  对一切时刻  $t$  成立。

在假设 4.2 下，性质 3.1 显然成立，且可以证明：存在常数  $H_2 \geq 1$ 、 $\lambda_2 \in (0, 1)$ ，使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 全局成立（而不局限在某个邻域内），其中

$$q_1(t) = 0, \quad q_2(t) = H_2 \lambda_2^t, \quad q_3(t) = H_2 \lambda_2^t.$$

特别地，令  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{L_g H_2^3}{(1-\lambda_2)^3} \right\}$ ，则性质 3.2 关于半径  $R$  成立。这时，对于带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器，可以在该系统模型下应用定理 3.3，得到下面的动态超额代价上界。

**定理 4.2.** 对满足假设 4.2 的最优控制问题 (4.2)，若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \ln \left( \frac{2H_2^3 L_g}{(1-\lambda_2)^2} \right) / \ln(1/\lambda_2) = O(1),$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O(\lambda_2^k T).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明，可参见附录 B.3。

## 第 5 章 模型预测控制在预测含误差时的性能分析

本章中，我们将进而考虑预测含误差的线性时变系统。首先，我们在一般的线性时变系统讨论噪声含误差这一较简单的情形，其分析在直觉上相当于直接在次态控制误差上叠加了噪声预测误差，而任何常数误差都随时间推移指数衰减。随后，我们进一步讨论动力学矩阵与代价函数均含误差的一般情形，这一分析是相对困难的，因此我们只考虑时变的线性二次型调节器系统。

### 5.1 仅噪声含预测误差的线性时变系统

首先考虑一种简单情形，即对系统动力学方程和代价函数的预测保持精确，而仅对噪声序列的预测含有误差。这时，所需要的微扰上界与无预测误差的情形完全相同，这给分析带来了便利。作为 (2.1) 的特例，该最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t) + f_t^u(u_t)) + F_T(x_T) \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t(\xi_t^*), \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

假设 5.1 列举了所需的全部系统假设。

假设 5.1. 最优控制问题 (5.1) 满足下述假设：

- 代价函数：对一切时刻  $t$ ，阶段代价函数  $f_t^x(x_t, u_t)$ 、 $f_t^u(x_t, u_t)$  以及终端代价函数  $F_T(x_T)$  都是二阶连续可微的非负函数，且具有  $\mu$ -强凸性和  $\ell$ -光滑性。不失一般性，不妨假设其极小值点均为 0。
- 动力系统：对一切时刻  $t$ ，系统的动力学矩阵满足  $\|A_t\| \leq a$ 、 $\|B_t\| \leq b$  和  $\|B_t^\dagger\| \leq b'$ ，其中  $B_t^\dagger$  表示矩阵  $B_t$  的 Moore-Penrose 广义逆；同时，系统是  $\sigma$ -一致可控的，且可控性指数为  $d$ 。
- 预测量： $w_t$  是有界的（对一切时刻  $t$  和参数  $\xi_t \in \Xi_t$ ， $\|w_t(\xi_t)\| \leq D_w$ ），并且关于不确定性参数  $\xi_t$  是  $L_w$ -Lipschitz 连续的（对一切时刻  $t$  和参数  $\xi_t \in \Xi_t$ ， $\|w_t(\xi_t) - w_t(\xi_t')\| \leq L_w \|\xi_t - \xi_t'\|$ ）。

此时，可以证明 OPT 的稳定性，即存在常数  $D_{x^*} > 0$ ，使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  ( $\forall t$ )。

本节将沿用 4.1 节得到的微扰响应上界，并展示两种不同的分析方法。

**直接应用微扰分析基本定理** 在假设 5.1 下，性质 3.1 显然成立，且可以证明：存在常数  $H_3 \geq 1$ 、 $\lambda_3 \in (0, 1)$ ，使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 全局成立（而不局限在某个邻域内），其中

$$q_1(t) = 0, \quad q_2(t) = H_3 \lambda_3^t, \quad q_3(t) = H_3 \lambda_3^t.$$

特别地，令  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{2L_g H_3^3}{(1-\lambda_3)^3} \right\}$ ，则性质 3.2 关于半径  $R$  成立。这时，对于带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器，可以在该系统模型下应用定理 3.3，得到下面的动态超额代价上界。

**定理 5.1.** 对满足假设 5.1 的最优控制问题 (5.1)，若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \ln \left( \frac{4H_3^3 L_g}{(1-\lambda_3)^2} \right) / \ln(1/\lambda_3) = O(1),$$

而预测误差满足

$$\sum_{\tau=0}^k \lambda_2^{2\tau} \rho_{t,\tau} \leq \Omega(1),$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O \left( \sqrt{T \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau) + \lambda_3^{2k} T^2 + \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau)} \right).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明，可参见附录 B.4。注意到：当预测误差为 0 时，定理 5.1 中的上界将退化至  $O(\lambda_3^k T)$ ，这与 4.1 节的结果保持一致。此外，由加权总预测误差  $\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau)$  的形式可知，降低近期的预测误差比降低远期的预测误差更为重要——这同样与我们的直觉相符。

**使用一般分析框架** 为了得到性能竞争比的上界，我们需要使用前文介绍的更一般的分析框架。这一框架也能同时得到动态超额代价的上界，且结果的阶与定理 5.1 中保持一致，只在条件和常数上有所差异。

**定理 5.2.** 对满足假设 5.1 的最优控制问题 (5.1)，若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \frac{1}{2} \ln \left( H_3^3 \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \right) / \ln(1/\lambda_3),$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) = O \left( \sqrt{\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau) + \lambda_3^{2k} \cdot T} \right).$$

进而，如果  $\tau$  步后的平方加总预测强度有上界  $P(\tau) \leq \pi_\tau \cdot \text{cost}(\text{OPT})$  ( $0 \leq \tau < k$ )，则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  有性能竞争比上界

$$\frac{\text{cost}(\text{MPC}_k)}{\text{cost}(\text{OPT})} \leq 1 + O\left(\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau + \lambda_3^{2k} + \sqrt{\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau + \lambda_3^{2k}}\right).$$

## 5.2 含一般预测误差的时变线性二次型调节器系统

本节将讨论更一般的预测误差，即动力学函数和代价函数均含误差的情形。为了简化讨论，我们仅考虑形式较简单的线性二次型调节器（LQR）系统。作为 (2.1) 的特例，该最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} \left( (x_t - \bar{x}_t(\xi_t^*))^\top Q_t(\xi_t^*) (x_t - \bar{x}_t(\xi_t^*)) + u_t^\top R_t(\xi_t^*) u_t \right) + F_T(x_T; \xi_T^*) \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = A_t(\xi_t^*) \cdot x_t + B_t(\xi_t^*) \cdot u_t + w_t(\xi_t^*), \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

这里终端代价函数也是二次型，即  $F_T(x_T; \xi_T^*) := (x_T - \bar{x}_T(\xi_T^*))^\top P_T(\xi_T^*) (x_T - \bar{x}_T(\xi_T^*))$ 。假设 5.2 列举了所需的全部系统假设。

**假设 5.2.** 最优控制问题 (5.2) 满足下述假设：

- **代价函数：**对一切时刻  $t$  和参数  $\xi_t \in \Xi_t$ ，阶段代价矩阵满足  $\mu I \leq Q_t(\xi_t) \leq \ell I$ 、 $\mu I \leq R_t(\xi_t) \leq \ell I$ ，而终端代价矩阵也满足  $\mu I \leq P_T(\xi_T) \leq \ell I$ 。
- **动力系统：**对一切时刻  $t$  和参数  $\xi_t \in \Xi_t$ ，动力学矩阵  $B_t(\xi_t)$  都满足  $\|B_t\| \leq L_g$ ；同时，各时刻的真实系统和所有预测的系统都是  $\sigma$ -一致可控的。
- **预测量：**所有预测量都有界（对一切时刻  $t$  和参数  $\xi_t \in \Xi_t$ ， $\|w_t(\xi_t)\| \leq D_w$ 、 $\|\bar{x}_t(\xi_t)\| \leq D_{\bar{x}}$ 、 $\|A_t(\xi_t)\| \leq a$ 、 $\|B_t(\xi_t)\| \leq b$ ），并且都是 Lipschitz 连续的（例如，存在常数  $L_A$ ，使  $\|A_t(\xi_t) - A_t(\xi'_t)\| \leq L_A \|\xi_t - \xi'_t\|$  对一切  $\xi_t, \xi'_t \in \Xi_t$  及一切时刻  $t$  成立；类似可定义  $L_B, L_Q, L_R, L_{\bar{x}}, L_w$  等常数）。
- **OPT 的稳定性：**存在常数  $D_{x^*} > 0$ ，使得  $\|x_t^*\| \leq D_{x^*}$  对一切时刻  $t$  成立。

在假设 5.2 下，性质 3.1 显然成立，且可以证明：存在常数  $H_4 \geq 1$ 、 $\lambda_4 \in (0, 1)$ ，使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 全局成立（而不局限在某个邻域内），其中

$$q_1(t) = H_4 \lambda_4^{2t}, \quad q_2(t) = H_4 \lambda_4^t, \quad q_3(t) = H_4 \lambda_4^t.$$

特别地，令  $R = D_{x^*} + D_{\bar{x}}$ ，则性质 3.2 关于半径  $R$  成立。这时，对于带终端代价

函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; \bar{x}(\xi_{t|t+k}))$  的  $\text{MPC}_k$  控制器，可以在该系统模型下应用定理 3.3，得到下面的动态超额代价上界。

**定理 5.3.** 对满足假设 5.2 的最优控制问题 (5.2)，若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \log \left( \frac{(1 - \lambda_4)^2}{4H_4^2 L_g ((1 - \lambda_4)(D_{x^*} + D_{\bar{x}}) + H_4(D_{x^*} + 1))} \right) / \ln(1/\lambda_4) = O(1),$$

而预测误差满足

$$\sum_{\tau=0}^k \lambda_4^{2\tau} \rho_{t,\tau} \leq \Omega(1),$$

则带终端代价  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; \bar{x}(\xi_{t|t+k}))$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O \left( \sqrt{T \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_4^\tau P(\tau) + \lambda_4^{2k} T^2 + \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_4^\tau P(\tau)} \right).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明，可参见附录 B.5。与定理 5.1 相比，定理 5.3 额外要求加权总预测误差  $\sum_{\tau=0}^k \lambda_4^{2\tau} \rho_{t,\tau}$  有常数上界。结果的不同凸显了动力学矩阵  $(A_t, B_t)$  上的预测误差与噪声  $w_t$  上预测误差的差异：在动力学方程含误差的情形中，若预测误差超过某个阈值，则控制器甚至无法镇定系统轨迹，更不用说实现近似最优控制了。



## 第 6 章 模型预测控制在系统含约束条件时的性能分析

本章中，我们从另一个角度一般化系统模型，即要求系统状态  $x_t$  和控制输入  $u_t$  在某些约束条件下（而非全空间中）取值。这样的假设也符合我们对真实系统的认识，因为大多数实际控制系统都不允许系统状态和控制输入趋于无穷大。引入约束条件将给我们的分析带来较大的困难，其主要难点来源于边界附近的突变，包括系统状态接近约束集边界时产生的轨迹可行性问题，以及活跃约束集 (*active constraint set*) 发生跃变时产生的不连续性问题。

由于文献中关于含约束优化问题的微扰响应已经有比较丰富的结果，本章还将着重展示如何对已有的微扰响应上界作变形，使之符合性质 3.2 要求的形式。这也从侧面反映了框架的普适性和易用性。

### 6.1 含仿射约束的时变线性二次型调节器系统

首先，我们仍考虑较简单的线性二次型调节器 (LQR) 系统，只是向系统中加入关于  $(x_t, u_t)$  的仿射约束。为了突出约束集的影响，我们不考虑预测误差，即假定所有预测都是准确的。作为 (2.1) 的特例，该最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^{T-1} ((x_t - \bar{x}_t)^\top Q_t (x_t - \bar{x}_t) + u_t^\top R_t u_t) + (x_T - \bar{x}_T)^\top Q_T (x_T - \bar{x}_T) \\ & \text{subject to} && x_t = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && \tilde{F}_t^x x_t + \tilde{F}_t^u u_t \geq \tilde{\beta}_t, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中， $\tilde{F}_t^x \in \mathbb{R}^{r_t \times n}$ 、 $\tilde{F}_t^u \in \mathbb{R}^{r_t \times m}$  分别是关于  $x_t$ 、 $u_t$  的约束矩阵，而  $\tilde{\beta}_t \in \mathbb{R}^{r_t}$  则是仿射约束的常数向量（这里用  $r_t$  表示  $t$  时刻的约束数量）。假设 6.1 列举了所需的全部系统假设。

**假设 6.1.** 最优控制问题 (5.2) 满足下述假设：<sup>①</sup>

- 代价函数：对一切时刻  $t$ ，代价矩阵  $Q_t$ 、 $R_t$  满足  $\ell \leq \sigma(Q_t), \sigma(R_t) \leq \mu$ 。
- 动力系统：对一切时刻  $t$ ，动力学矩阵  $A_t$ 、 $B_t$  均满足  $\|A_t\| \leq a$ 、 $\|B_t\| \leq b$ ；同时，系统是  $\sigma$ -一致可控的，且可控性系数为  $d$ 。

<sup>①</sup> 在原文 [51] 中， $\sigma$ -一致可控性被称为  $\text{UCC}(\lambda_c)$ ，其中  $\lambda_c = \sigma^2$ ； $\gamma$ -LICQ 性质被称为  $\text{UDB}(\gamma)$ 。这里选用的术语与前文及控制理论中通用的术语保持一致。

- 约束条件: 对一切时刻  $t$  和一切活跃约束指标集  $I_t \subseteq \{1, \dots, r_t\}$ , 活跃约束矩阵 (定义见附录)  $\Gamma_{t,I_t}^x$ 、 $\Gamma_{t,I_t}^u$ 、 $\hat{\Gamma}_{t,I_t}^u$  满足  $\|\Gamma_{t,I_t}^x\| \leq \gamma_x$ ,  $\|\Gamma_{t,I_t}^u\| \leq \gamma_u$ ,  $\|\hat{\Gamma}_{t,I_t}^u\| \leq \hat{\gamma}_u$ 。同时, 存在常数  $R_0$ , 使得对一切时刻  $t$ , 任意  $x_t \in \mathbb{B}(x_t^*, R_0)$  处的活跃约束指标集均为最优状态  $x_t^*$  处的活跃约束指标集  $I_t^*$ , 且矩阵  $\Gamma_{t,I_t^*}^u$  满足  $\gamma$ -LICQ 条件 (即  $\Gamma_{t,I_t^*}^u (\Gamma_{t,I_t^*}^u)^\top \geq \gamma I$ )。

在假设 6.1 下, 性质 3.1 显然成立, 且可以证明: 存在常数  $H_5, \bar{H}_5$  以及  $\lambda_5, \bar{\lambda}_5 \in (0, 1)$ , 使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 关于半径  $R$  成立, 其中

$$q_1(t) = 0, \quad q_2(t) = \bar{H}_5 \bar{\lambda}_5^t, \quad q_3(t) = H_5 \lambda_5^t.$$

特别地, 令  $R := \max \left\{ R_0, D_{x^*}, \frac{L_g \bar{H}_5^3}{(1-\bar{\lambda}_5)^3} \right\}$ , 则性质 3.2 关于半径  $R$  成立。这时, 对于带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器, 可以在该系统模型下应用定理 3.3, 得到下面的动态超额代价上界。

**定理 6.1.** 对满足假设 6.1 的最优控制问题 (6.1), 若预测视野  $k$  满足

$$k \geq \ln \left( \frac{2\bar{H}_5^3 L_g}{(1-\bar{\lambda}_5)^2} \right) / \ln(1/\bar{\lambda}_5) = O(1),$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t+k}) \equiv \mathbb{I}(\cdot; 0)$  的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O(\lambda_5^k T).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明, 可参见附录 B.6。

## 6.2 含一般约束和预测误差的非线性系统

现在, 我们回到最一般的最优控制问题 (2.1), 即考虑带有一般约束函数, 且代价函数、动力学函数和约束函数均可能包含预测误差的非线性系统。假设 6.2 列举了所需的全部系统假设。

**假设 6.2.** 最优控制问题 (5.2) 满足下述假设:

- 微分性质: 各时刻的代价函数、动力学函数和约束函数关于  $(x_t, u_t)$  和  $\xi_t$  都是二阶连续可微的。<sup>①</sup>
- 约束条件: 在优化问题的原始-对偶最优解  $(\alpha^*, \eta^*)$  处, SSOSC 性质和 LICQ 性质成立, 即: 约化 Hessian 矩阵  $H_{\text{rc}}(\alpha^*, \eta^*)$  是正定矩阵, 而活跃约束的 Jacobian 矩阵  $G(\alpha^*, \eta^*)$  是行满秩的。

<sup>①</sup> 特别地, 若终端代价函数  $F$  是指示函数, 则将它视为等式约束而非代价函数。

- 奇异值有界：存在奇异值有界特征组  $(\bar{\sigma}_H, \bar{\sigma}_R, \underline{\sigma}_H)$  (定义见附录)，它适用于有限时间最优控制问题的下列参量  $p = (z, \zeta_{t_1:t_2})$ ：

- ① 在区间  $[t_1, t_2] = [t, t+k]$  上 (其中  $t < T-k$ )，

$$z \in \mathbb{B}(x_t^*, R), \quad \xi_{t:t+k-1} \in \Xi_{t:t+k-1}, \quad \xi_{t+k} \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R), \quad F = \mathbb{I};$$

- ② 在区间  $[t_1, t_2] = [t, T]$  上 (其中  $t < T$ )，

$$z \in \mathbb{B}(x_t^*, R), \quad \xi_{t:T} \in \Xi_{t:T}, \quad F = F_T.$$

令人惊讶的是，在如此一般的系统模型中，仍可以设法在 **OPT** 附近的一个邻域内得到指数衰减的微扰响应上界。事实上，利用 [53] 中的定理 4.5，可以证明：存在常数  $R, H_6 \geq 1$  和  $\lambda_6 \in (0, 1)$ ，使得微扰响应上界 (3.1)、(3.2) 在  $x_t^*$  半径为  $R$  的邻域内成立，其中

$$q_1(t) = 0, \quad q_2(t) = H_6 \lambda_6^t, \quad q_3(t) = H_6 \lambda_6^t.$$

从而性质 3.2 在 **OPT** 附近半径为  $R$  的邻域内成立。这时，对于带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; \bar{y}(\xi_{t+k|t}))$  (其中  $\bar{y}(\xi_{t+k|t}) \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$ ) 的  $\text{MPC}_k$  控制器，可以在该系统模型下应用定理 3.3，得到下面的动态超额代价上界。

**定理 6.2.** 对满足假设 6.2 的最优控制问题 (2.1)，若预测视野  $k$  足够大、而预测误差  $\rho_{t,\tau}$  足够小，使得

$$H_6 \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_6^\tau \rho_{t,\tau} + 2RH_6 \lambda_6^k \leq \frac{(1-\lambda_6)^2 R}{H_6^2 L_g},$$

则带终端代价函数  $F_{t+k}(\cdot; \xi_{t|t+k}) = \mathbb{I}(\cdot; \bar{y}(\xi_{t+k|t}))$  (其中  $\bar{y}(\xi_{t+k|t}) \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$ ) 的  $\text{MPC}_k$  控制器有动态超额代价上界

$$\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) \leq O \left( \sqrt{T \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_6^\tau P(\tau) + \lambda_6^{2k} T^2} + \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_6^\tau P(\tau) \right).$$

定理中常数的具体表达式及其完整证明，可参见附录 B.7。定理 6.2 乍看之下是本文给出的最一般的结果，但其劣势在于包含了许多很强的假设。例如， $\text{MPC}_k$  设计中所需的终端代价函数，其参考终端状态  $\bar{y}(\xi_{t+k|t})$  必须充分接近  $x_{t+k}^*$ ，但  $x_{t+k}^*$  和邻域半径  $R$  在大多数实际系统中都难以测量 (当然，在一些特殊的假设下，可以采用特定的方法取出适当的  $\bar{y}(\xi_{t+k|t})$ ，可参见附录 B.7 的讨论)。此外，SSOSC 条件对实际的动态系统实例来说是不易验证的，且定理通过限制状态在 **OPT** 的邻域内规避了递归可行性的问题<sup>[59]</sup>。这些不足都留待未来进一步改进。

## 第 7 章 结论

本文提出了一种通用的基于微扰法的分析框架，它大致可以分为相互独立的三步（见图 3.2、图 3.3）：首先，我们在所给的系统模型中建立框架所要求的两种微扰响应上界；随后，我们利用微扰响应上界，通过上界的交替细化导出次态控制误差的上界（次态控制误差的定义见定义 3.1），对于模型预测控制器推导过程可总结为次态控制误差有界引理（引理 3.1）；最后，我们利用次态控制误差的上界和微扰响应上界得到动态超额代价的上界，其推导过程可总结为次态控制误差累加引理（引理 3.2）。特别地，对于本文所关注的模型预测控制器  $\text{MPC}_k$  而言，上述框架可归结为微扰分析基本定理（定理 3.3）。在应用时，只要证明了定理所要求的两种微扰上界，同时令系统满足一些基本假设，就可以直接应用微扰分析基本定理，得到模型预测控制器在不同系统中的动态超额代价上界。

本质上，该框架的后两步用一种巧妙的递归视角刻画了动态控制器（特别是模型预测控制器）能取得有界动态超额代价的一类充分条件：第二步保证了现态  $x_t$  靠近离线最优控制轨迹的最优态  $x_t^*$  时，次态控制误差  $e_t$  也是有界的；第三步则保证了轨迹历史上所有次态控制误差都充分小时，次态  $x_{t+1}$  仍将靠近离线最优控制轨迹的最优态  $x_{t+1}^*$ ；因此，在一定条件下，两者递归地保证了动态控制器的控制轨迹 **ALG** 总在离线最优控制轨迹 **OPT** 的邻域内，从而动态超额代价也是有限的。在这一过程中，微扰响应上界发挥了至关重要的作用，它不仅保证每一时刻的次态控制误差有界，而且还保证有界的次态控制误差不会在时间上积累——这充分表明微扰响应上界在整个框架中的核心地位。

为了展示上述分析框架的通用性，我们在一系列不同的系统模型（参见表 2.1）中应用微扰分析基本定理得到了  $\text{MPC}_k$  控制器的动态超额代价上界。针对不含预测误差的情形，我们在线性时变系统中利用新框架复现了 [48] 中的结果，并将其推广至非线性时变系统；针对含预测误差的情形，我们首先考虑了系统噪声含误差的简单情形，随后将其推广至一般的预测误差（即动力学函数和代价函数都含预测误差）的复杂情形，并指出了两种预测误差对动态控制器的影响有显著差异；针对含约束集的问题，我们从含仿射约束的线性二次型调节器系统起步，并最终在最一般的情形下证明了（局部成立的）动态超额代价上界。本文中提供了丰富的实例，意在表明我们提出的基于微扰法的分析框架应用范围相当广泛，可以处理时变系统中的预测误差、动力学非线性和约束条件，因此具有一定的普适性。

除分析框架上的贡献外，本文所证明的许多结果也有一定的理论价值。例如，此前对线性时变系统中的模型预测控制器，仅有模型不含误差时的性能保证<sup>[48]</sup>，本文则进而给出了模型含一般误差时的性能保证。在近年来模型预测控制逐渐与学习方法结合的大背景下<sup>[60]</sup>，这样的结果无疑有助于刻画了模型预测控制器在动态控制中的性能。又如，在含约束集或含非线性动力学的系统中，已有的性能保证结果<sup>[51-52]</sup>均要求系统模型准确，且模型预测控制器须带有充分长的重规划窗口，而我们提供的性能保证则允许模型含预测误差，且控制器可在每一时刻基于新预测滚动地求解下一时刻的控制输入。用一种框架集中地导出多种具有理论价值的新结果，也从侧面证明了这一框架的应用潜力。

当然，本文的工作尚有一定的局限性。一方面，本文提出的微扰分析基本定理只适用于算法 2.1 给出的模型预测控制器  $\text{MPC}_k$ ，对于其他的动态控制器，仍需要根据其具体形式有技巧地重复框架的推理过程（尤其是第二步的推理过程），应用时仍不够简明直接。另一方面，本文的部分结果（最典型的如定理 6.2）带有较强的假设，还有进一步推广的空间。这些问题留待未来的工作加以解决。

## 插图和附表索引

图 3.1	次态控制误差累加引理的直观理解：次态控制误差不会在时间上累积	15
图 3.2	微扰分析框架的分步示意图（针对模型预测控制器 $MPC_k$ ）	17
图 3.3	微扰分析框架的分步示意图（针对一般动态控制器 $ALG$ ）	25
表 2.1	本文考虑的系统模型一览	13

## 参考文献

- [1] GARCIA C E, PRETT D M, MORARI M. Model predictive control: Theory and practice—a survey[J]. *Automatica*, 1989, 25(3): 335-348.
- [2] ROSOLIA U, BORRELLI F. Learning model predictive control for iterative tasks. a data-driven control framework[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(7): 1883-1896.
- [3] KORDA M, MEZIĆ I. Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control[J]. *Automatica*, 2018, 93: 149-160.
- [4] ALLGÖWER F, ZHENG A. Nonlinear model predictive control: volume 26[M]. Birkhäuser, 2012.
- [5] FALCONE P, TUFO M, BORRELLI F, et al. A linear time varying model predictive control approach to the integrated vehicle dynamics control problem in autonomous systems[C]//2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007: 2980-2985.
- [6] WIEBER P B. Trajectory free linear model predictive control for stable walking in the presence of strong perturbations[C]//2006 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. 2006: 137-142.
- [7] GU D, HU H. Receding horizon tracking control of wheeled mobile robots[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(4): 743-749.
- [8] SHIM D H, KIM H J, SASTRY S. Decentralized nonlinear model predictive control of multiple flying robots[C]//42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475): volume 4. 2003: 3621-3626.
- [9] DIEDAM H, DIMITROV D, WIEBER P B, et al. Online walking gait generation with adaptive foot positioning through linear model predictive control[C]//2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2008: 1121-1126.
- [10] NEUNERT M, DE CROUSAZ C, FURRER F, et al. Fast nonlinear model predictive control for unified trajectory optimization and tracking[C]//2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2016: 1398-1404.
- [11] MORGAN D, CHUNG S J, HADAEGH F Y. Model predictive control of swarms of spacecraft using sequential convex programming[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(6): 1725-1740.
- [12] RICHARDS A, HOW J P. Robust variable horizon model predictive control for vehicle maneuvering[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(7): 333-351.

- [13] DI CAIRANO S, YANAKIEV D, BEMPORAD A, et al. An MPC design flow for automotive control and applications to idle speed regulation[C]//2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2008: 5686-5691.
- [14] STEWART G, BORRELLI F. A model predictive control framework for industrial turbodiesel engine control[C]//2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2008: 5704-5711.
- [15] AMARI R, ALAMIR M, TONA P. Unified MPC strategy for idle-speed control, vehicle start-up and gearing applied to an automated manual transmission[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 7079-7085.
- [16] HATANAKA T, YAMADA T, FUJITA M, et al. Explicit receding horizon control of automobiles with continuously variable transmissions[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 561-569.
- [17] DI CAIRANO S, TSENG H E, BERNARDINI D, et al. Vehicle yaw stability control by coordinated active front steering and differential braking in the tire sideslip angles domain[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2013, 21(4): 1236-1248.
- [18] HIDALGO-GONZALEZ P, HENRIQUEZ-AUBA R, CALLAWAY D, et al. Frequency regulation using data-driven controllers in power grids with variable inertia due to renewable energy[C]//2019 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM). 2019: 1-5.
- [19] SANTHOSH M, VENKAIAH C, VINOD KUMAR D M. Current advances and approaches in wind speed and wind power forecasting for improved renewable energy integration: A review [J]. Engineering Reports, 2020, 2(6): e12178.
- [20] LIN M, LIU Z, WIERMAN A, et al. Online algorithms for geographical load balancing[C]// Proceedings of the International Green Computing Conference (IGCC). 2012: 1-10.
- [21] LI X, ZHANG C, CHEN A, et al. Model predictive direct current control strategy for three-level T-type rectifier under unbalanced grid voltage conditions[C]//2018 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC). 2018: 1514-1519.
- [22] SHETAYA A A, AMIN A M A, ABDALLA O H. Model predictive control based power system operation planning of grid connected high share renewable energy[C]//2017 Nineteenth International Middle East Power Systems Conference (MEPCON). 2017: 1500-1504.
- [23] PARISIO A, RIKOS E, GLIELMO L. A model predictive control approach to microgrid operation optimization[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1813-1827.
- [24] YARAMASU V, WU B. Predictive control of a three-level boost converter and an NPC inverter for high-power PMSG-based medium voltage wind energy conversion systems[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2014, 29(10): 5308-5322.



- [25] WANG T, GAO H, QIU J. A combined adaptive neural network and nonlinear model predictive control for multirate networked industrial process control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(2): 416-425.
- [26] CLARKE D W. Application of generalized predictive control to industrial processes[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1988, 8(2): 49-55.
- [27] ELLIS M, DURAND H, CHRISTOFIDES P D. A tutorial review of economic model predictive control methods[J]. Journal of Process Control, 2014, 24(8): 1156-1178.
- [28] LI Y, QU G, LI N. Online optimization with predictions and switching costs: Fast algorithms and the fundamental limit[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(10): 4761-4768.
- [29] LI Y, CHEN X, LIN. Online optimal control with linear dynamics and predictions: Algorithms and regret analysis.[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2019, 32.
- [30] CHEN N, AGARWAL A, WIERMAN A, et al. Online convex optimization using predictions [J]. ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 2015, 43(1): 191-204.
- [31] AGARWAL N, BULLINS B, HAZAN E, et al. Online control with adversarial disturbances [C]//International Conference on Machine Learning. PMLR, 2019: 111-119.
- [32] AGARWAL N, HAZAN E, SINGH K. Logarithmic regret for online control[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2019, 32.
- [33] GOEL G, LIN Y, SUN H, et al. Beyond online balanced descent: An optimal algorithm for smoothed online optimization[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2019, 32: 1875-1885.
- [34] SHI G, LIN Y, CHUNG S J, et al. Online optimization with memory and competitive control [C]//Advances in Neural Information Processing Systems. 2020: 20636-20647.
- [35] PAN W, SHI G, LIN Y, et al. Online optimization with feedback delay and nonlinear switching cost[J]. arXiv preprint arXiv:2111.00095, 2021.
- [36] GOEL G, HASSIBI B. The power of linear controllers in LQR control[J]. Proceedings of Machine Learning Research vol TBD, 2020, 1: 13.
- [37] MINASYAN E, GRADU P, SIMCHOWITZ M, et al. Online control of unknown time-varying dynamical systems[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2021, 34.
- [38] DIEHL M, AMRIT R, RAWLINGS J B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 56(3): 703-707.
- [39] ANGELI D, AMRIT R, RAWLINGS J B. On average performance and stability of economic model predictive control[J]. IEEE transactions on automatic control, 2011, 57(7): 1615-1626.

- [40] ANGELI D, CASAVOLA A, TEDESCO F. Theoretical advances on economic model predictive control with time-varying costs[J]. *Annual Reviews in Control*, 2016, 41: 218-224.
- [41] GRÜNE L, PIRKELMANN S. Economic model predictive control for time-varying system: Performance and stability results[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2020, 41(1): 42-64.
- [42] SIMCHOWITZ M, FOSTER D. Naive exploration is optimal for online LQR[C]// *International Conference on Machine Learning*. PMLR, 2020: 8937-8948.
- [43] YU C, SHI G, CHUNG S J, et al. The power of predictions in online control[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020, 33.
- [44] QU G, SHI Y, LALE S, et al. Stable online control of linear time-varying systems[J]. *arXiv preprint arXiv:2102.01309*, 2021.
- [45] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Sequential quadratic programming[J]. *Numerical optimization*, 2006: 529-562.
- [46] SHI G, HÖNIG W, SHI X, et al. Neural-swarm2: Planning and control of heterogeneous multirotor swarms using learned interactions[J]. *arXiv preprint arXiv:2012.05457*, 2020.
- [47] ZHANG R, LI Y, LIN N. On the regret analysis of online LQR control with predictions[J]. *arXiv preprint arXiv:2102.01309*, 2021.
- [48] YIHENG L, YANG H, HAOYUAN S, et al. Perturbation-based regret analysis of predictive control in linear time varying systems[Z]. 2021.
- [49] YU C, SHI G, CHUNG S J, et al. Competitive control with delayed imperfect information[J]. *arXiv preprint arXiv:2010.11637*, 2020.
- [50] GOEL G, WIERMAN A. An online algorithm for smoothed regression and LQR control[C]// *Proceedings of the Machine Learning Research: volume 89*. 2019: 2504-2513.
- [51] XU W, ANITESCU M. Exponentially convergent receding horizon strategy for constrained optimal control[J]. *Vietnam Journal of Mathematics*, 2019, 47(4): 897-929.
- [52] NA S, ANITESCU M. Superconvergence of online optimization for model predictive control [J]. *arXiv preprint arXiv:2001.03707*, 2020.
- [53] SHIN S, ANITESCU M, ZAVALA V M. Exponential decay of sensitivity in graph-structured nonlinear programs[J]. *arXiv preprint arXiv:2101.03067*, 2021.
- [54] LEE G M, TAM N N, YEN N D. Continuity of the solution map in quadratic programs under linear perturbations[J]. *Journal of optimization theory and applications*, 2006, 129(3): 415-423.
- [55] FIACCO A V, ISHIZUKA Y. Sensitivity and stability analysis for nonlinear programming[J]. *Annals of Operations Research*, 1990, 27(1): 215-235.

- [56] SHIN S, ZAVALA V M, ANITESCU M. Decentralized schemes with overlap for solving graph-structured optimization problems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 7(3): 1225-1236.
- [57] SHIN S, ZAVALA V M. Controllability and observability imply exponential decay of sensitivity in dynamic optimization[J]. IFAC-PapersOnLine, 2021, 54(6): 179-184.
- [58] LIN Y, GOEL G, WIERMAN A. Online optimization with predictions and non-convex losses [J]. Proceedings of the ACM on Measurement and Analysis of Computing Systems, 2020, 4(1): 1-32.
- [59] BORRELLI F, BEMPORAD A, MORARI M. Predictive control for linear and hybrid systems [M]. Cambridge University Press, 2017.
- [60] PAPADIMITRIOU D, ROSOLIA U, BORRELLI F. Control of unknown nonlinear systems with linear time-varying MPC[C]//2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2020: 2258-2263.
- [61] DEMKO S, MOSS W F, SMITH P W. Decay rates for inverses of band matrices[J]. Mathematics of computation, 1984, 43(168): 491-499.

## 附录 A 外文资料的书面翻译

### 含预测线性动力系统的最优在线控制：RHGC 算法及其超额代价分析

*Yingying Li, Xin Chen, Na Li*

#### 摘要

本文在时不变的线性动力系统中，研究了关于时变凸代价函数的在线优化控制问题，其中在每个时间点处控制器都能得到未来若干步（预测窗口）代价函数的准确预测。我们设计了一种在线算法，称为 RHGC（Receding Horizon Gradient-based Control，基于梯度的滑动时间窗口控制），该算法通过在有限步内计算梯度利用了对代价函数的预测。进而，我们研究了该算法按动态超额代价计量的性能，即在线控制代价减去离线最优代价。结果表明，RHGC 算法的动态超额代价关于预测窗口大小呈指数衰减。此外，通过考虑线性二次型跟踪问题，我们给出了在线控制算法动态超额代价的基本极限，并证明了我们设计的 RHGC 方法在超额代价上界方面几乎实现了这一基本极限，这体现了该算法的有效性。最后，我们对线性和非线性系统的算法进行了数值实验，这些实验证明了 RHGC 算法的有效性和通用性。

#### 目录

摘要.....	48
A.1 引言 .....	49
A.2 问题描述和预备知识 .....	51
A.2.1 理论分析的假设 .....	52
A.3 RHGC 在线控制算法 .....	53
A.3.1 问题转化 .....	53
A.3.2 在线控制算法 RHGC 的设计 .....	55
A.4 性能保证：超额代价上界 .....	57
A.5 线性二次型跟踪问题：超额代价上界和基本极限 .....	59

A.6 数值实验 .....	60
A.7 小结 .....	61
参考文献.....	61

## A.1 引言

在本文中，我们考虑一个控制时长 (*horizon*) 为  $N$  的离散时间序贯决策 (*sequential decision-making*) 问题。在每个时间点  $t = 0, \dots, N - 1$  处，控制器观察一个动力系统的状态  $x_t$ ，并收到未来  $W$  步预测窗口 (*look-ahead window*) 内的代价函数 (包括关于状态和控制输入的代价)，即  $f_t(x) + g_t(u), \dots, f_{t+W-1}(x) + g_{t+W-1}(u)$ ；然后，它决定控制输入  $u_t$  并将其输入系统， $u_t$  按照已知的系统动力学方程将系统驱动至新状态  $x_{t+1}$ 。为简单起见，我们考虑一个线性时变 (*linear time-invariant, LTI*) 系统  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ ，其中动力学矩阵  $(A, B)$  已知。控制器的设计目标是在  $N$  步的控制时长内最小化总代价。该最优控制问题在序贯决策问题中已经得到了广泛的应用，如数据中心管理<sup>[1-2]</sup>、机器人技术<sup>[3]</sup>、自动驾驶<sup>[4-5]</sup>、能源系统<sup>[6]</sup>、制造业<sup>[7-8]</sup>等。

在控制理论研究中，对上述最优控制问题的探讨主要集中在经济模型预测控制 (*economic MPC, EMPC*) 上，它是模型预测控制 (*MPC*) 的一个变种，主要目标是优化经济代价<sup>[9-16]</sup>。与主要目标是镇定受控系统的 MPC 不同<sup>[17-19]</sup>，EMPC 侧重于优化与某些经济代价函数有关的性能。近年来，EMPC 的优化性能分析受到了很多关注，包括时不变的代价函数<sup>[20-22]</sup>和时变的代价函数<sup>[12,14,23-25]</sup>。然而，关于 EMPC 性能的大多数研究集中在渐进性能保证上，而对非渐进性能的理解仍然有限，特别是对时变的代价函数更是知之甚少。此外，对具有较好计算效率的算法，如次优 MPC (*suboptimal MPC*) 和不精确 MPC (*inexact MPC*)<sup>[26-29]</sup>，其最优性能保证是不充分的。

相反，在线优化领域有很多关于非渐进性能分析的工作，这里性能是用超额代价 (*regret*) 来衡量的，如静态超额代价<sup>[30-31]</sup>和动态超额代价<sup>[32]</sup>等。然而，大多数工作没有考虑预测和 (或) 动力系统。含预测的问题正受到广泛的关注和应用，如数据中心管理问题中的电价预测<sup>[33-34]</sup>，有鉴于此，关于预测如何影响在线优化问题的研究受到学界日益高涨的关注<sup>[33-39]</sup>。遗憾的是，尽管一些工作已经考虑了切换代价 (包含切换代价的问题可以视作一类简单而特殊的动力系统<sup>[39-40]</sup>)，但对预测如何影响一般动力系统的在线优化问题，相关研究还很缺乏。

本文提出了一种新的基于梯度的在线算法，我们称之为 *RHGC* (*Receding Horizon Gradient-based Control*，基于梯度的滑动时间窗口控制)，并给出了算法的动态超额代价上界作为其非渐进的最优性保证。我们指出，*RHGC* 可以利用任何基于梯度的优化方法，如 vanilla 梯度下降法、Nesterov 梯度法、三重动量法等<sup>[41-42]</sup>。由于篇幅限制，本文着重关注 *RHTM* (*Receding Horizon Triple Momentum*，基于三重动量的滑动时间窗口控制)。为了给出理论保证，我们额外假设代价函数具有强凸性和 Lipschitz 光滑性，但这些假设对 *RHGC* 的实际应用是不必要的。具体来说，我们证明 *RHTM* 的动态超额代价上界随预测窗口大小  $W$  呈指数衰减，这表明我们的算法有效地利用了预测。此外，当系统具有更好的可控性指数<sup>[43]</sup> (即变得更可控) 时，算法的动态超额代价上界也会下降。此外，我们还证明了一切在线控制算法的性能都服从一个基本极限，即其最劣动态超额代价具有下界；进而，我们还证明了该下界几乎与我们的 *RHTM* 的动态超额代价上界一致。这一结果说明我们的 *RHTM* 算法至少在最坏情况下实现了接近最优的性能。为了更直观地解释上述结果的意义，我们将算法应用于线性二次型跟踪问题 (*linear quadratic tracking*) 中进行讨论，该问题是文献中广泛考虑的控制问题。最后，我们对算法进行了数值实验，将 *RHGC* 算法应用于线性动力系统和非线性动力系统 (双轮机器人) 实现路径跟踪。结果表明，我们的算法对非线性系统同样有效，尽管我们的算法提出和理论分析主要关注了线性时不变系统。

最后，我们额外指出，近来出现了一些研究在线线性二次控制问题 (*online LQR*) 的工作，但其中大部分都关注了不含预测的情况<sup>[40,44-45]</sup>。正如本文之后所要证明的那样，这些算法可以在我们的 *RHGC* 算法中作为初始神谕机 (*initialization oracle*)。此外，我们的理论分析表明：*RHGC* 算法可以减少这些无预测在线算法的超额代价，且其系数随预测窗口大小  $W$  呈指数衰减。

**本文使用的记号** 对于矩阵  $A$  和  $B$ ，符号  $A \geq B$  表示  $A - B$  是半正定矩阵。矩阵和向量的范数  $\|\cdot\|$  默认取  $L_2$  范数。对于向量  $x$ ， $x^i$  表示向量的第  $i$  分量。对于集合  $\mathcal{I} = \{k_1, \dots, k_m\}$ ， $x^{\mathcal{I}} := (x^{k_1}, \dots, x^{k_m})^\top$  和  $A(\mathcal{I}, :)$  分别表示将向量  $x$  和矩阵  $A$  中行序号在  $\mathcal{I}$  中的各行取出、再按原顺序拼接在一起的向量和矩阵。

## A.2 问题描述和预备知识

在线性时不变（LTI）系统中，考虑具有时变代价函数  $f_t(x_t) + g_t(u_t)$  的有限控制时长离散时间最优控制问题。

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{N-1} (f_t(x_t) + g_t(u_t)) + f_N(x_N), \quad (\text{A.1})$$

$$\text{subject to } x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad t \geq 0.$$

其中，对一切  $t$  都有  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^m$ ；为方便起见，令  $\mathbf{x} := [x_1^\top, \dots, x_N^\top]^\top$ ,  $\mathbf{u} := [u_0^\top, \dots, u_{N-1}^\top]^\top$ ；在问题中， $x_0$  是给定的， $N$  是控制时长， $f_N(x_N)$  是额外的终端代价。求解最优控制问题（A.1）需要知道从  $t=0$  到  $t=N$  的所有代价函数，然而，在每个时间点  $t$ ，通常只能获得未来一段较短时间内的代价函数，决策者需要利用现有的信息在线地决定控制输入  $u_t$ 。本文重点研究了这种预测对于在线最优控制问题的作用。

具体而言，我们考虑了一个简化的预测模型：在每个时间点  $t$ ，决策者得到未来  $W$  步（预测窗口）内代价函数  $f_t, g_t, \dots, f_{t+W-1}, g_{t+W-1}$  的准确预测，但对未来  $W$  步之后的代价函数则一无所知（这意味着我们不排除  $f_{t+W}, g_{t+W}, \dots$  被敌对方作对抗性生成的可能）。尽管我们采取的预测模型在短期内显得过于乐观、在长期内又可能显得过于悲观，但该模型具有以下优点：①它刻画了实际预测中的常见现象，即短期预测通常比长期预测准确得多；②它使我们能够更有效地理解预测的作用，并将其扩展到更复杂的情况下<sup>[33-34,46-47]</sup>。

下面，我们描述在线最优控制问题：在每个时间点  $t = 0, 1, \dots$  处，

- 控制器观察状态  $x_t$ ，并接收预测  $f_t, g_t, \dots, f_{t+W-1}, g_{t+W-1}$ ；
- 控制器决定控制输入  $u_t$ ，将其输入系统，并承受  $f_t(x_t) + g_t(u_t)$  的代价；
- 系统演化至次态  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ 。<sup>①</sup>

由此，在线控制算法  $\mathcal{A}$  可作如下定义： $\mathcal{A}$  在每一时刻将观测历史与预测代价函数映射至控制输入  $u_t(\mathcal{A})$ ，即

$$u_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \left( x_t(\mathcal{A}), \dots, x_0(\mathcal{A}); \{f_s, g_s\}_{s=0}^{t+W-1} \right), \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

这里  $x_t(\mathcal{A})$  是使用算法  $\mathcal{A}$  控制时在第  $t$  步观察到的状态，其中  $x_0(\mathcal{A}) = x_0$  给定。

为了刻画在线控制算法的性能，本文的超额代价系与（离线）最优控制代价

① 与许多基于学习的控制器设计不同，我们假设  $A, B$  为控制所知，并假设系统状态  $x_t$  是直接可观察的。放宽这些信息需求的工作留待以后完成。

$J^*$  比较得到，其中

$$J^* := \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : x_{t+1} = Ax_t + Bu_t} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\text{A.3})$$

而在线算法  $\mathcal{A}$  的性能由下式决定<sup>①</sup>

$$\text{Regret}(\mathcal{A}) := J(\mathcal{A}) - J^* = J(\mathbf{x}(\mathcal{A}), \mathbf{u}(\mathcal{A})) - J^*. \quad (\text{A.4})$$

这种性能指标通常称为动态超额代价 (*dynamic regret*)<sup>[32,48]</sup>，有时也被称为性能竞争差 (*competitive difference*)<sup>[49]</sup>。另一种较流行的超额代价概念是静态超额代价 (*static regret*)，它将在在线算法的超额代价与最优静态控制器进行比较<sup>[44-45]</sup>。显然，静态超额代价的基准比动态超额代价的基准要弱，因为最优控制器可能偏离静态控制器相当之远，并且文献已经证明：即便在不含预测（即  $\mathbf{W} = 0$ ）时，也可能给出  $o(N)$  的静态遗憾。因此，我们将把重点放在动态超额代价的分析上，即研究预测如何改善动态超额代价。

**例 A.1 (线性二次型跟踪问题 (linear quadratic tracking, LQ tracking))**。现考虑线性时不变系统  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$  中的离散时间跟踪问题，我们希望系统状态沿轨迹  $\{\theta_t\}_{t=0}^N$  演化，控制器的设计目标是 minimized 沿轨迹  $\{\theta_t\}_{t=0}^N$  的二次型跟踪损失

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} [(x_t - \theta_t)^\top Q_t (x_t - \theta_t) + u_t^\top R_t u_t] + \frac{1}{2} (x_N - \theta_N)^\top Q_N (x_N - \theta_N),$$

其中矩阵  $Q_t$ 、 $R_t$  是正定的。在实际应用中，关于完整轨迹  $\{\theta_t\}_{t=0}^N$  的信息通常不可能在控制开始时就完全知道，而是在控制过程中不断揭示出来的，故这一问题自然地是一种带有预测的在线控制问题。

### A.2.1 理论分析的假设

首先，我们引入控制理论中的一个标准假设，即系统的可控性。直观地说，一个可控的系统总可以通过适当的控制输入被驱动到状态空间的任何状态<sup>[50]</sup>。

**假设 A.1.** 本文考虑的线性时不变系统  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$  是可控的。

众所周知，任何可控的线性时不变系统都可以转化为控制标准型 (*control canonical form*)<sup>[43]</sup>，并且这种线性转化在知晓  $A$  和  $B$  的前提下可以作有效的预处理；同时，代价函数  $f_t$ 、 $g_t$  也可以在控制标准型下作相应的改写。因此，不失一般性，本文只考虑具备控制标准型形式的线性时不变系统。我们所采取的控制标准型定义如下。

<sup>①</sup> 不难看出，超额代价取决于初始状态  $x_0$ ，但为了简化符号，我们省略  $x_0$ 。





决于这些分量附近若干（而非一个）时间步长的变量值。进而，我们将利用这一特殊结构设计在线控制算法。

具体而言，在改写的无约束优化问题中，我们使用  $x_t$  的下述分量： $x_t^{k_1}, \dots, x_t^{k_m}$ ，这里为方便起见定义  $\mathcal{I} = \{k_1, \dots, k_m\}$ （回忆定义A.1）。为使记号简明，定义

$$z_t := [x_t^{k_1}, \dots, x_t^{k_m}]^\top, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

则显然有  $z_t^j = x_t^{k_j}$  ( $j = 1, \dots, m$ )。令  $\mathbf{z} := [z_1^\top, \dots, z_N^\top]^\top$ 。控制标准型系统的动力学方程给出等式约束  $x_t = Ax_{t-1} + Bu_{t-1}$ ，因此我们有  $x_t^i = x_{t-1}^{i+1}$  ( $\forall i \notin \mathcal{I}$ )。进而， $x_t$  可以用  $z_{t-p+1}, \dots, z_t$  表示为

$$x_t = \left( \underbrace{z_{t-p_1+1}^1, \dots, z_t^1}_{p_1}, \underbrace{z_{t-p_2+1}^2, \dots, z_t^2}_{p_2}, \dots, \underbrace{z_{t-p_m+1}^m, \dots, z_t^m}_{p_m} \right), \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

这里我们约定  $t \leq 0$  的  $z_t$  由  $x_0$  决定，即它们可以取恰当的值使 (A.6) 在  $t = 0$  时成立。为了记号上的方便，本文不失一般性地取  $x_0 = 0$ ，则对于  $t \leq 0$  恒有  $z_t = 0$ 。类似地， $u_t$  可以由  $z_{t-p+1}, \dots, z_t, z_{t+1}$  确定，即

$$\begin{aligned} u_t &= z_{t+1} - A(\mathcal{I}, :)x_t \\ &= z_{t+1} - A(\mathcal{I}, :)(z_{t-p_1+1}^1, \dots, z_t^1, \dots, z_{t-p_m+1}^m, \dots, z_t^m), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

其中  $A(\mathcal{I}, :)$  从上到下依次包含  $A$  的第  $k_1, \dots, k_m$  行（回忆绪论中定义的记号）。

由于方程 (A.5)、(A.6) 和 (A.7) 定义了  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  和  $\mathbf{z}$  之间的一一映射，我们也可以将  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  上的约束优化问题 (A.1) 相应地转化为  $\mathbf{z}$  上的优化问题；并且，由于系统的动力学约束  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$  被自然地嵌入到 (A.6) 和 (A.7) 的关系中，故改写的优化问题将自然地成为关于  $\mathbf{z}$  的无约束优化问题。具体来说，新的代价函数可以通过将 (A.6)、(A.7) 代入  $f_t(x_t)$  和  $g_t(u_t)$  得到。我们把转化后的代价函数记为  $\tilde{f}_t(z_{t-p+1}, \dots, z_t) := f_t(x_t)$  和  $\tilde{g}_t(z_{t-p+1}, \dots, z_t, z_{t+1}) := g_t(u_t)$ ，则无约束优化问题的目标函数可写为

$$C(\mathbf{z}) =: \sum_{t=0}^N \tilde{f}_t(z_{t-p+1}, \dots, z_t) + \sum_{t=0}^{N-1} \tilde{g}_t(z_{t-p+1}, \dots, z_{t+1}). \quad (\text{A.8})$$

函数  $C(\mathbf{z})$  具有许多好的性质，我们将其中一些重要性质集中总结如下。

**引理 A.1.** 函数  $C(\mathbf{z})$  具有以下性质：

- ①  $C(\mathbf{z})$  具有  $\mu_c$ -强凸性 ( $\mu_c = \mu_f$ ) 和  $\ell_c$ -Lipschitz 光滑性，其中常数

$$\ell_c := p\ell_f + (p+1)\ell_g \|I_m - A(\mathcal{I}, :)\|^2;$$

② 对一切受控系统轨迹  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  (满足  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ )，都有  $C(\mathbf{z}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ，其中  $\mathbf{z}$  按 (A.5) 定义；对应地，对一切  $\mathbf{z}$ ，由 (A.6) 和 (A.7) 给出的轨迹  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  都满足  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$  及  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = C(\mathbf{z})$ ；

③ (有限时间耦合) (A.8) 给出的  $\tilde{f}_t + \tilde{g}_t$  仅依赖于  $z_{t-p+1}, \dots, z_{t+1}$ 。

性质②意味着任何确定  $\mathbf{z}$  的在线算法都可以经由 (A.6) 和 (A.7) 转化为确定  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  的在线算法，且两者具有相同的总代价。

例 A.2. 为演示  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  和  $\mathbf{z}$  的转化，考虑下述动力系统 ( $n = 2, m = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t. \quad (\text{A.9})$$

在本例中， $k_1 = 2, \mathcal{I} = \{2\}$ ， $A(\mathcal{I}, :) = [a_1, a_2]$ ， $z_t = x_t^2$ 。动力学方程 (A.9) 给出

$$x_t^1 = x_{t-1}^2, \quad x_t = z_{t-1}^\top, z_t^\top]^\top, \quad u_t = x_{t+1}^2 - A(\mathcal{I}, :)x_t = z_{t+1} - A(\mathcal{I}, :)[z_{t-1}^\top, z_t^\top]^\top.$$

因此，转化后的代价函数可写为

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(z_{t-1}^\top, z_t^\top) &= f_t(x_t) = f_t([z_{t-1}, z_t]^\top), \\ \tilde{g}_t(z_{t-1}, z_t, z_{t+1}) &= g_t(u_t) = g_t(z_{t+1} - A(\mathcal{I}, :)[z_{t-1}^\top, z_t^\top]^\top). \end{aligned}$$

### A.3.2 在线控制算法 RHGC 的设计

基于上述转化 (A.8)，本节介绍我们提出的 RHGC 在线控制算法，其灵感来自于 [39] 中的在线算法 RHGD。如前所述，任何关于  $z_t$  的在线算法都可以转化为关于  $x_t, u_t$  的在线算法，所以我们仅需设计求解  $z_t$  的在线算法。根据  $C(\mathbf{z})$  的有限时间耦合特性，总代价  $C(\mathbf{z})$  关于  $z_t$  的偏导数只取决于有限局部阶段代价  $\{\tilde{f}_\tau, \tilde{g}_\tau\}_{\tau=t}^{t+p-1}$  和有限局部阶段变量  $(z_{t-p}, \dots, z_{t+p}) =: z_{t-p:t+p}$ ，即

$$\frac{\partial C}{\partial z_t}(\mathbf{z}) = \sum_{s=t}^{t+p-1} \frac{\partial \tilde{f}_s}{\partial z_t}(z_{s-p+1}(k), \dots, z_s(k)) + \sum_{s=t-1}^{t+p-1} \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial z_t}(z_{s-p+1}(k), \dots, z_{s+1}(k)).$$

在不致引起混淆的情况下，为了突出  $C$  的有限时间耦合特性，我们将  $\frac{\partial C}{\partial z_t}(\mathbf{z})$  的自变量显示地改写为  $\frac{\partial C}{\partial z_t}(z_{t-p:t+p})$ 。这能更加明显地提示我们：虽然控制器无法获知未来所有时刻的代价函数，但只使用有限预测窗口下预测的代价函数，仍有可能计算出总代价的偏导数。该发现帮助我们设计了 RHGC 算法，它是已知梯度算法的在线实现，兼容的梯度算法包括 vanilla 梯度下降法、Nesterov 的加速梯度法、三重动量法等。由于篇幅限制，我们在本文中着重介绍三重动量法的在线实现 (即 RHTM 算法，见算法 A.1)，基于其他梯度算法的 RHGC 也可以类似地设计。

---

**算法 A.1** 基于三重动量的滑动时间窗口控制 (RHTM)
 

---

- 1: **输入:** 控制标准型  $(A, B)$ ,  $W \geq 1$ ,  $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$ , 步长  $\gamma_c, \gamma_z, \gamma_w, \gamma_y > 0$ , 初始神谕机  $\Phi$ .
  - 2: **for**  $t = 1 - W : N - 1$  **do**
  - 3: 第 1 步: 用初始神谕机  $\Phi$  初始化  $z_{t+W}(0)$ , 并初始化
 
$$\omega_{t+W}(-1) \leftarrow z_{t+W}(0), \quad \omega_{t+W}(0) \leftarrow z_{t+W}(0), \quad y_{t+W}(0) \leftarrow z_{t+W}(0).$$
  - 4: **for**  $j = 1, \dots, K$  **do**
  - 5: 第 2 步: 用三重动量法更新  $\omega_{t+W-jp}(j), y_{t+W-jp}(j), z_{t+W-jp}(j)$ :
 
$$\begin{aligned} \omega_{t+W-jp}(j) &\leftarrow (1 + \gamma_w)\omega_{t+W-jp}(j-1) - \gamma_w\omega_{t+W-jp}(j-2), \\ &\quad - \gamma_c \frac{\partial C}{\partial y_{t+W-jp}}(y_{t+W-(j+1)p:t+W-(j-1)p}(j-1)), \\ y_{t+W-jp}(j) &\leftarrow (1 + \gamma_y)\omega_{t+W-jp}(j) - \gamma_y\omega_{t+W-jp}(j-1), \\ z_{t+W-jp}(j) &\leftarrow (1 + \gamma_z)\omega_{t+W-jp}(j) - \gamma_z\omega_{t+W-jp}(j-1). \end{aligned}$$
  - 6: **end for**
  - 7: 第 3 步: 用  $z_{t+1}(K)$  和观测到的次态  $x_t$  计算  $u_t \leftarrow z_{t+1}(K) - A(\mathcal{I}, :)x_t$ .
  - 8: **end for**
- 

在上述 RHTM 算法中, 变量  $j$  指示  $C(\mathbf{z})$  梯度更新的迭代次数。确定  $z_t$  需要经过两个主要步骤:

- ① 初始化决策变量  $\mathbf{z}(0), \boldsymbol{\omega}(0), \mathbf{y}(0)$ , 其中  $\boldsymbol{\omega}(0), \mathbf{y}(0)$  是三重动量方法中用来加速收敛的辅助变量。我们不对初始神谕机  $\Phi$  作任何限制, 即  $\Phi$  可以是任何不借助预测的算法, 而  $z_{t+W}(0) \leftarrow \Phi\left(\{\tilde{f}_s, \tilde{g}_s\}_{s=0}^{t+W-1}\right)$ 。在 A.4 节中, 我们将构造一个具体的初始神谕机  $\Phi$ 。
- ② 使用预测窗口中预测的代价函数进行梯度更新。注意到  $(z_\tau(j), \omega_\tau(j), y_\tau(j))$  到  $(z_\tau(j+1), \omega_\tau(j+1), y_\tau(j+1))$  的梯度更新是按照倒序进行的, 即从  $\tau = t+W$  到  $\tau = t$ 。此外, 由于计算偏导数  $\frac{\partial C}{\partial z_t}$  需要局部变量  $z_{t-p:t+p-1}$ , 在预测窗口为  $W$  时, RHTM 算法只会对  $C(\mathbf{z})$  进行  $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$  次三重动量迭代。为了更直观地理解 RHGC 算法, 读者可以参阅 [39] 中给出的简单情形 (在那里我们取  $p = 1$ )。受篇幅限制, 本文不再对这一例子作赘述。

虽然 RHTM 只进行了少数几步梯度更新而看起来没有完全利用预测提供的信息, 但在 A.5 节中我们将证明: 就  $W$  而言, RHTM 实现了近乎最优的性能, 这说明我们的算法成功地提取并利用了预测信息。

最后, 我们简要介绍 MPC<sup>[17]</sup> 和次优 MPC<sup>[26]</sup>, 并将它们与我们的算法进行比较。MPC 试图在每个时间  $t$  解一个有  $W$  个阶段的优化问题, 并向系统提交第一个控制输入; 次优 MPC 是 MPC 的一个变种, 其设计目标是通过只进行少数几

次迭代的优化算法减少计算量，而并不完全精确地解出优化问题。我们的算法对计算能力的要求与次优 MPC 类似，即只需要进行几次梯度迭代；然而，它与次优 MPC 的主要区别在于，次优 MPC 需要对截断的  $W$  阶段最优控制问题进行梯度更新，而我们的算法仅仅根据  $W$  阶段的预测代价函数就能对总代价函数进行梯度更新，这种做法不仅同样解出了完整的  $N$  阶段最优控制问题，而且其求解过程是在线的（基于重构 (A.8)）。

#### A.4 性能保证：超额代价上界

我们的 RHTM 算法在原理上可以精确实现  $C(\mathbf{z})$  的  $K$  步三重动量法迭代，因此可以直接得到下述超额代价保证——这一上界将 RHTM 的超额代价和初始神谕机  $\Phi$  的超额代价联系起来。

**定理 A.2.** 对常数  $W \geq 1$ ，设  $\zeta := \ell_c / \mu_c$  为  $C(\mathbf{z})$  的条件数。对任意给定的初始神谕机  $\Phi$ ，以及给定的算法步长  $\gamma_c = \frac{1+\phi}{\ell_c}$ 、 $\gamma_w = \frac{\phi^2}{2-\phi}$ 、 $\gamma_y = \frac{\phi^2}{(1+\phi)(2-\phi)}$ 、 $\gamma_z = \frac{\phi^2}{1-\phi^2}$ （其中  $\phi = 1 - 1/\sqrt{\zeta}$ ），我们有

$$\text{Regret}(\text{RHTM}) \leq \zeta^2 \left( \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta}} \right)^{2K} \text{Regret}(\Phi).$$

其中， $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$ ， $\text{Regret}(\Phi)$  是初始控制器  $u_t(0) = z_{t+1}(0) - A(\mathcal{I}, :)x_t(0)$  的超额代价。

定理 A.2 表明：若将初始神谕机  $\Phi$  取为任何不带预测的在线算法，RHTM 都可以利用预测将超额代价降低至原来的  $\zeta^2 \left( \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta}} \right)^{2K}$  倍，而只需要引入额外的  $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$  轮梯度更新。此外，该倍数随着  $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$  的指数衰减，而  $K$  几乎是随着  $W$  线性增加的函数——这进一步表明，随着预测窗口  $W$  的延长，RHTM 算法在任何初始化方法下都能以指数速度提高性能。最后， $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$  随着  $p$  的增加而减少，说明超额代价随可控性指数  $p$  的增加而增加——这同样符合我们的直觉，因为  $p$  大致表示控制器能够有效驱动系统状态的速度， $p$  越大、驱动系统到达目标状态所需时间越长（参见定义 A.1）。考虑例 A.2 有助于理解这一点：在这一例子中，由于  $u_{t-1}$  并不直接影响  $x_t^1$ ，故至少需要  $p = 2$  步才能将  $x_t^1$  驱动至任意目标状态。

**一种特定的初始化方法：FOSS** 为了完成对 RHTM 的超额代价分析，我们指明了一种简单的初始化方法，称为 FOSS (*Follow the Optimal Steady State*，最

优稳态跟随法)。如前所述, 任何不带预测的在线控制算法 (如 [44-45]) 都可以作为初始神谕机  $\Phi$  使用, 但这些论文的性能大多以静态超额代价给出, 这与我们需要的动态超额代价不相一致。

**定义 A.2 (FOSS 初始神谕机).** 阶段代价函数  $f(x) + g(u)$  的最优稳态 (OSS) 定义为  $(x^e, u^e) =: \arg \min_{x=Ax+Bu} (f(x) + g(u))$ 。FOSS 初始神谕机根据代价函数  $f_t(x) + g_t(u)$  求解最优稳态  $(x_t^e, u_t^e)$ , 并输出  $z_{t+1}(\text{FOSS}) = x_t^{e, \mathcal{I}}$  (即  $z_{t+1}$  恰为  $x_t^e$  中序号属于  $\mathcal{I}$  的分量取出构成的向量), 其中  $\mathcal{I} = \{k_1, \dots, k_m\}$ 。

FOSS 方法的灵感来自于以下事实: 最优稳态控制所导致的总代价是线性时不变系统在极限状态下的最优平均代价, 故 FOSS 方法至少对于缓慢变化的  $f_t, g_t$  能给出可接受的性能。当然, 我们也承认, FOSS 方法的提出主要是为了方便理论分析, 将其他的在线算法用作  $\Phi$  完全可能使算法性能在多方面超过使用 FOSS 的算法。接下来, 我们只需要证明 FOSS 的一个超额代价上界, 它依赖于 Bellman 方程的解。

**定义 A.3 (Bellman 方程的解<sup>[51]</sup>).** 设  $\lambda^e$  为最优稳态代价 (即最优极限平均代价, 参见 [52])。最优极限平均代价控制问题的 Bellman 方程是

$$h^e(x) + \lambda^e = \min_u (f(x) + g(u) + h^e(Ax + Bu)).$$

其中, Bellman 方程的解  $h^e(x)$  有时也称为偏置函数 (*bias function*)<sup>[51]</sup>。为了保证解的唯一性, 通常会规定一些额外的条件 (如  $h^e(0) = 0$ )。

**定理 A.3 (FOSS 的超额代价上界).** 设  $(x_t^e, u_t^e)$ 、 $h_t^e(x)$  分别是关于阶段代价函数  $f_t(x) + g_t(u)$  的最优稳态及其偏置函数 ( $0 \leq t \leq N-1$ ), 并设  $0 \leq t \leq N-1$  时刻的 Bellman 方程都有唯一解  $h_t^e(x)$ , 则 FOSS 方法的超额代价具有上界

$$\text{Regret}(\text{FOSS}) = O \left( \sum_{t=0}^{N-1} (\|x_{t-1}^e - x_t^e\| + h_{t-1}^e(x_t^*) - h_t^e(x_t^*)) \right).$$

其中,  $\{x_t^*\}_{t=0}^N$  表示最优稳态, 并约定  $x_{-1}^e = x_0^* = x_0$ 、 $h_{-1}^e(x) = 0$ 、 $h_N^e(x) = f_N(x)$ 、 $x_N^e = \theta_N$ 。进而, 利用定理 A.2, 由 FOSS 作为初始神谕机的 RHTM 算法具有动态超额代价上界

$$\text{Regret}(\text{RHTM}) = O \left( \left( \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta}} \right)^{2K} \sum_{t=0}^{N-1} (\|x_{t-1}^e - x_t^e\| + h_{t-1}^e(x_t^*) - h_t^e(x_t^*)) \right).$$

定理 A.3 通过最优稳态  $x_t^e$  和偏置函数  $h_t^e$  的变化来求得超额代价上界。如果  $f_t, g_t$  不发生变化,  $x_t^e, h_t^e$  也不发生变化, 这样算法就不会产生任何超额代价, 这

与我们的直觉相符。尽管该定理要求  $h_t^e$  的存在，但对于多数控制问题（例如 LQ 跟踪和具有转折尖峰（*turn-pike*）性质的控制问题<sup>[25,53]</sup>）而言，该定理要求的存在性是可以证明的。

## A.5 线性二次型跟踪问题：超额代价上界和基本极限

为了给定理 A.2、A.3 中的超额代价分析提供更直观的理解，我们将 RHTM 算法应用于例 A.1。对于  $Q_t, R_t, \theta_t$  随时间变化的情形，分析结果将在附录中呈现；而在正文中，我们仅考虑一种特殊情况，该情况下超额代价上界的表达式显得十分简明，它既是以 FOSS 为初始神谕机的 RHTM 算法的上界，又是一切在线算法的下界。如此简明的表达式向我们揭示了下界和上界之间几乎相当（至多差常数倍），从而表明 RHTM 算法对预测的利用效率是近乎最优的，即便它在每一步内只进行了有限步的梯度更新。

LQ 跟踪问题的特殊情况有以下形式

$$\frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} [(x_t - \theta_t)^\top Q (x_t - \theta_t) + u_t^\top R u_t] + \frac{1}{2} x_N^\top P^e x_N. \quad (\text{A.10})$$

其中， $Q, R > 0$ ， $P^e$  是关于  $Q, R$  的 *Riccati* 代数方程的解<sup>[54]</sup>。简单地说，在这种特殊情况下，对  $0 \leq t \leq N-1$  总有  $Q_t = Q, R_t = R$ ，而  $Q_N = P^e, \theta_N = 0$ ，故只有  $\theta_t$  ( $t = 1, \dots, N-1$ ) 是可变的。这时，LQ 跟踪问题 (A.10) 的目标是在状态代价和控制代价权重不变的前提下，跟踪一条随时间变化的轨迹  $\theta$ 。

**超额代价上界** 首先，基于定理 A.2、A.3，容易给出下述超额代价上界。

**推论 A.4.** 对于特殊形式的 LQ 跟踪问题，由 FOSS 作为初始神谕机的 RHTM 算法具有动态超额代价上界

$$\text{Regret}(\text{RHTM}) = O\left(\left(\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta}}\right)^{2K} \sum_{t=0}^N \|\theta_t - \theta_{t-1}\|\right).$$

其中， $K = \left\lfloor \frac{W-1}{p} \right\rfloor$ ， $\zeta$  是相应  $C(\mathbf{z})$  的条件数， $\theta_{-1} = 0$ 。

该推论表明：在  $Q, R$  不变的情况下，超额代价可以被  $\theta_t$  的总变差所约束。

**基本极限** 另一方面，对于任何在线算法，我们都有以下超额代价下限。

**定理 A.5 (超额代价下界).** 设  $1 \leq W \leq N/3$ ，对任意条件数  $\zeta > 1$ 、总变差上界  $2\bar{\theta} \leq L_N \leq (2N+1)\bar{\theta}$ 、可控性指数  $p \geq 1$  以及任意在线算法  $\mathcal{A}$  而言，总存在一个具有形式 (A.10) 的 LQ 跟踪问题，其控制标准型系统  $(A, B)$  具有可控性指数

$p$ , 其目标状态序列  $\{\theta_t\}$  满足总变差上界  $\sum_{t=1}^N \|\theta_t - \theta_{t-1}\| \leq L_N$ , 相应的  $C(\mathbf{z})$  具有条件数  $\zeta$ , 并且关于算法  $\mathcal{A}$  的下列超额代价下界成立

$$J(\mathcal{A}) - J^* = \Omega \left( \left( \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{2K} L_N \right) = \Omega \left( \left( \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{2K} \sum_{t=0}^N \|\theta_t - \theta_{t-1}\| \right). \quad (\text{A.11})$$

其中,  $K = \lfloor \frac{W-1}{p} \rfloor$ ,  $\theta_{-1} = 0$ 。

颇令人惊讶的是, 定理 A.5 中的下界与推论 A.4 中的上界 (尤其在  $\zeta$  很大时) 几乎是一致的, 这表明 RHTM 算法以接近最优的方式利用了预测信息。定理的主要条件是预测窗口与控制时长相比很短 ( $W \leq N/3$ ), 并且代价函数的变化也不能太小 ( $L_N \geq 2\bar{\theta}$ ) ——这符合我们的直觉, 否则, 在线控制问题就显得过于简单, 也很容易设计出使超额代价更小的算法。

## A.6 数值实验

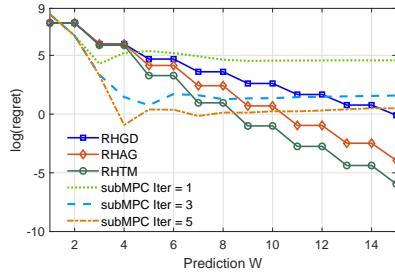


图 A.1 LQ 跟踪

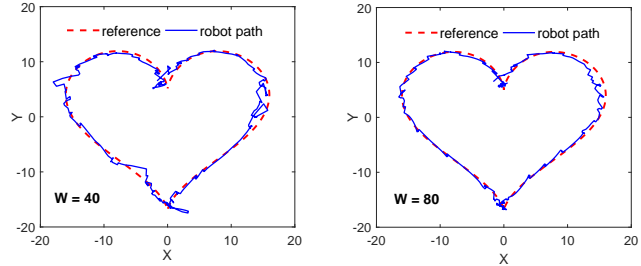


图 A.2 两轮机器人跟踪 (带有非线性动力学)

**LQ 跟踪问题** 实验配置参见附录, 这里线性时不变系统的阶数为  $n = 2$ , 控制输入是一个标量, 因此该系统的  $p = 2$ 。我们将 RHTM 算法与快速梯度 MPC (subMPC)<sup>[26]</sup> 进行比较, 它是一种次优 MPC 算法。粗略地说, 该算法先构造从  $t$  到  $t + W - 1$  的  $W$  级截断最优控制, 然后通过 Nesterov 梯度下降法求解这些优化问题。我们实现的 subMPC 算法中, 由于有  $W$  阶段的变量, 每一次梯度更新都需要  $W$  次部分梯度计算; 换言之, 我们的 RHTM 可视为具有 1 次 Nesterov 迭代的 subMPC。图 A.1 还额外绘制了进行 3 次、5 次 Nesterov 迭代的 subMPC。图 A.1 表明: 我们设计的算法 RHGD、RHAG、RHTM 在超额代价方面都表现出关于  $W$  的指数衰减, 并且这种衰减是分段常数的, 这与定理 A.2 所预言的一致。容易看出: RHTM 和 RHAG 相比 RHGD 都有更好的表现, 这符合我们的直观认识, 因



为 TM 和 AG 都是 GD 的加速版本。此外，所有算法的性能都远优于只进行一次迭代的次优 MPC，而还可以注意到：次优 MPC 通过增加迭代次数实现了更好的性能，但是当  $W$  变大时，改进就趋于饱和——这与 RHTM 算法形成鲜明的对比。

**两轮移动机器人的路径跟踪** 尽管我们的在线算法是基于线性时不变系统设计和分析的，但我们的 RHGC 算法同样可以在非线性系统上应用。这里我们考虑一个服从非线性动力学方程  $\dot{x} = v \cos \delta, \dot{y} = v \sin \delta, \dot{\delta} = \omega$  的两轮移动机器人，其中  $(x, y)$  是机器人的位置， $v, \omega$  分别是切向速度和角速度， $\delta$  表示  $v$  与  $x$  轴间切角<sup>[55]</sup>。系统的控制变量为  $v$  和  $\omega$ ，例如，可通过电机的脉宽调制 (PWM) 实现这种控制。给定一个参考路径  $(x_r(t), y_r(t))$ ，路径跟踪的目标是平衡跟踪性能和控制代价，即  $\min \sum_{t=0}^N (c_t^e \cdot ((x_t - x_r(t))^2 + (y_t - y_r(t))^2) + c_t^v \cdot v_t^2 + c_t^\omega \cdot \omega_t^2)$ 。系统的动力学方程依时间间隔  $\Delta_t = 0.025$  秒离散化；随后，按照类似上文的思路，将最优路径跟踪问题重新表述为关于  $(x_t, y_t)$  的无约束优化问题，并应用 RHGC 算法求解（详见附录）。图 A.2 展示了预测窗口为  $W = 40$ 、 $W = 80$  的跟踪结果，它们分别对应于 1 秒、2 秒的实际预测窗口。<sup>①</sup>我们看到：当路径较平滑时，机器人能很好地遵循参考轨迹；但当路径有急转弯时，控制会出现一些偏差；同时，更长的预测窗口也会带来更好的跟踪性能。这些结果证实了我们的 RHGC 算法对非线性系统也有较好的控制性能。

## A.7 小结

本文研究了线性动力系统的在线控制问题中，预测对于提升动态超额代价的作用。我们设计了 RHTM 算法，并提供了它的一个超额代价上界；我们还证明了一个基本极限，并且指出该基本极限几乎与 RHTM 的超额代价上界一致。关于此课题，未来的工作包括：① 研究非线性系统；② 研究带有干扰和噪声的系统；③ 研究带有状态和控制约束的系统；④ 研究系统动力学方程未知的情形。

## 参考文献

- [1] Nevena Lazic, Craig Boutilier, Tyler Lu, Eehern Wong, Binz Roy, MK Ryu, and Greg Imwalle. Data center cooling using model-predictive control. *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 3814–3823, 2018.

<sup>①</sup> 关于具备不同  $W$  的系统的实际表现，可参考<https://youtu.be/fal56LTBD1s>上的视频。

- [2] Wei Xu, Xiaoyun Zhu, Sharad Singhal, and Zhikui Wang. Predictive control for dynamic resource allocation in enterprise data centers. *2006 IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium NOMS 2006*, pages 115–126, 2006.
- [3] Tomas Baca, Daniel Hert, Giuseppe Loianno, Martin Saska, and Vijay Kumar. Model predictive trajectory tracking and collision avoidance for reliable outdoor deployment of unmanned aerial vehicles. *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 6753–6760, 2018.
- [4] Jackeline Rios-Torres and Andreas A. Malikopoulos. A survey on the coordination of connected and automated vehicles at intersections and merging at highway on-ramps. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(5):1066–1077, 2016.
- [5] Kyoung-Dae Kim and Panganamala Ramana Kumar. An MPC-based approach to provable system-wide safety and liveness of autonomous ground traffic. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(12):3341–3356, 2014.
- [6] Samir Kouro, Patricio Cortés, René Vargas, Ulrich Ammann, and José Rodríguez. Model predictive control — a simple and powerful method to control power converters. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 56(6):1826–1838, 2008.
- [7] Edgar Perea-Lopez, B Erik Ydstie, and Ignacio E Grossmann. A model predictive control strategy for supply chain optimization. *Computers & Chemical Engineering*, 27(8-9):1201–1218, 2003.
- [8] Wenlin Wang, Daniel E Rivera, and Karl G Kempf. Model predictive control strategies for supply chain management in semiconductor manufacturing. *International Journal of Production Economics*, 107(1):56–77, 2007.
- [9] Moritz Diehl, Rishi Amrit, and James B Rawlings. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):703–707, 2010.
- [10] Matthias A Müller and Frank Allgöwer. Economic and distributed model predictive control: Recent developments in optimization-based control. *SICE Journal of Control and Measurement and System Integration*, 10(2):39–52, 2017.
- [11] Matthew Ellis, Helen Durand, and Panagiotis D Christofides. A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, 24(8):1156–1178, 2014.
- [12] Antonio Ferramosca, James B Rawlings, Daniel Limón, and Eduardo F Camacho. Economic MPC for a changing economic criterion. *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6131–6136, 2010.
- [13] Matthew Ellis and Panagiotis D Christofides. Economic model predictive control with time-varying objective function for nonlinear process systems. *AIChE Journal*, 60(2):507–519, 2014.

- [14] David Angeli, Alessandro Casavola, and Francesco Tedesco. Theoretical advances on economic model predictive control with time-varying costs. *Annual Reviews in Control*, 41:218–224, 2016.
- [15] Rishi Amrit, James B Rawlings, and David Angeli. Economic optimization using model predictive control with a terminal cost. *Annual Reviews in Control*, 35(2):178–186, 2011.
- [16] Lars Grüne. Economic receding horizon control without terminal constraints. *Automatica*, 49(3):725–734, 2013.
- [17] JB Rawlings and DQ Mayne. *Postface to model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub, 2012.
- [18] A Bemporad, G Ferrari-trecate, D Mignone, M Morari, and F D Torrisi. Model predictive control - ideas for the next generation. In *European Control Conference*, 1999.
- [19] J B Rawlings and D Q Mayne. *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob Hill Pub, 2009.
- [20] David Angeli, Rishi Amrit, and James B Rawlings. On average performance and stability of economic model predictive control. *IEEE transactions on automatic control*, 57(7):1615–1626, 2012.
- [21] Lars Grüne and Marleen Stieler. Asymptotic stability and transient optimality of economic MPC without terminal conditions. *Journal of Process Control*, 24(8):1187–1196, 2014.
- [22] Lars Grüne and Anastasia Panin. On non-averaged performance of economic MPC with terminal conditions. *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4332–4337, 2015.
- [23] Antonio Ferramosca, Daniel Limon, and Eduardo F Camacho. Economic MPC for a changing economic criterion for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(10):2657–2667, 2014.
- [24] Lars Grüne and Simon Pirkelmann. Closed-loop performance analysis for economic model predictive control of time-varying systems. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5563–5569, 2017.
- [25] Lars Grüne and Simon Pirkelmann. Economic model predictive control for time-varying system: Performance and stability results. *Optimal Control Applications and Methods*, 2018.
- [26] Melanie Nicole Zeilinger, Colin Neil Jones, and Manfred Morari. Real-time suboptimal model predictive control using a combination of explicit MPC and online optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7):1524–1534, 2011.
- [27] Yang Wang and Stephen Boyd. Fast model predictive control using online optimization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(2):267–278, 2010.

- [28] Knut Graichen and Andreas Kugi. Stability and incremental improvement of suboptimal MPC without terminal constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(11):2576–2580, 2010.
- [29] Douglas A Allan, Cuyler N Bates, Michael J Risbeck, and James B Rawlings. On the inherent robustness of optimal and suboptimal nonlinear MPC. *Systems & Control Letters*, 106:68–78, 2017.
- [30] Elad Hazan. *Introduction to Online Convex Optimization*. Foundations and Trends(r) in Optimization Series. Now Publishers, 2016.
- [31] S. Shalev Shwartz. *Online Learning and Online Convex Optimization*. Foundations and Trends(r) in Machine Learning. Now Publishers, 2012.
- [32] Ali Jadbabaie, Alexander Rakhlin, Shahin Shahrampour, and Karthik Sridharan. Online optimization: Competing with dynamic comparators. *Artificial Intelligence and Statistics*, pages 398–406, 2015.
- [33] Minghong Lin, Adam Wierman, Lachlan LH Andrew, and Eno Thereska. Dynamic right-sizing for power-proportional data centers. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 21(5):1378–1391, 2013.
- [34] Minghong Lin, Zhenhua Liu, Adam Wierman, and Lachlan LH Andrew. Online algorithms for geographical load balancing. *International Green Computing Conference (IGCC)*, pages 1–10, 2012.
- [35] Alexander Rakhlin and Karthik Sridharan. Online learning with predictable sequences. *Conference on Learning Theory*, pages 993–1019, 2013.
- [36] Niangjun Chen, Anish Agarwal, Adam Wierman, Siddharth Barman, and Lachlan LH Andrew. Online convex optimization using predictions. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 43:191–204. ACM, 2015.
- [37] Masoud Badieli, Na Li, and Adam Wierman. Online convex optimization with ramp constraints. *IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC) and 2015*, pages 6730–6736, 2015.
- [38] Niangjun Chen, Joshua Comden, Zhenhua Liu, Anshul Gandhi, and Adam Wierman. Using predictions in online optimization: Looking forward with an eye on the past. *Proceedings of the 2016 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Science*, pages 193–206, 2016.
- [39] Yingying Li, Guannan Qu, and Na Li. Online optimization with predictions and switching costs: Fast algorithms and the fundamental limit. *arXiv preprint arXiv:1801.07780*, 2018.

- [40] Gautam Goel and Adam Wierman. An online algorithm for smoothed regression and lqr control. *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pages 2504–2513, 2019.
- [41] Yurii Nesterov. Springer science & business media. *Introductory lectures on convex optimization: A basic course*, 87, 2013.
- [42] Bryan Van Scoy, Randy A Freeman, and Kevin M Lynch. The fastest known globally convergent first-order method for minimizing strongly convex functions. *IEEE Control Systems Letters*, 2(1):49–54, 2017.
- [43] David Luenberger. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(3):290–293, 1967.
- [44] Yasin Abbasi-Yadkori, Peter Bartlett, and Varun Kanade. Tracking adversarial targets. *International Conference on Machine Learning*, pages 369–377, 2014.
- [45] Alon Cohen, Avinatan Hasidim, Tomer Koren, Nevena Lazic, Yishay Mansour, and Kunal Talwar. Online linear quadratic control. *International Conference on Machine Learning*, pages 1028–1037, 2018.
- [46] Lian Lu, Jinlong Tu, Chi-Kin Chau, Minghua Chen, and Xiaojun Lin. Online energy generation scheduling for microgrids with intermittent energy sources and co-generation. *Proceedings of the ACM SIGMETRICS/International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems*, 41, 2013.
- [47] Allan Borodin, Nathan Linial, and Michael E Saks. An optimal on-line algorithm for metrical task system. *Journal of the ACM (JACM)*, 39(4):745–763, 1992.
- [48] Aryan Mokhtari, Shahin Shahrampour, Ali Jadbabaie, and Alejandro Ribeiro. Online optimization in dynamic environments: Improved regret rates for strongly convex problems. *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 7195–7201, 2016.
- [49] Lachlan Andrew, Siddharth Barman, Katrina Ligett, Minghong Lin, Adam Meyerson, Alan Roytman, and Adam Wierman. A tale of two metrics: Simultaneous bounds on competitiveness and regret. *Conference on Learning Theory*, pages 741–763, 2013.
- [50] Joao P Hespanha. *Linear systems theory*. Princeton university press, 2018.
- [51] Martin L Puterman. *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. John Wiley & Sons, 2014.
- [52] David Angeli, Rishi Amrit, and James B Rawlings. Receding horizon cost optimization for overly constrained nonlinear plants. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 7972–7977, 2009.

- [53] Tobias Damm, Lars Grüne, Marleen Stieler, and Karl Worthmann. An exponential turnpike theorem for dissipative discrete time optimal control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(3):1935–1957, 2014.
- [54] Dimitri P Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena Scientific, 2011.
- [55] Gregor Klančar, Drago Matko, and Saso Blazic. Mobile robot control on a reference path. *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on and Mediterrean Conference on Control and Automation Intelligent Control*, pages 1343–1348, 2005.

## 附录 B 补充内容

### B.1 得到微扰响应上界的技术性工具

3.3 节已经简要介绍了得到微扰响应上界的几种常用方法，本节将进而讨论运用这些方法时常用的一些技术性结果。正如此前讨论的那样，在具有局部耦合性质的实际系统中，微扰响应上界的系数通常是（关于扰动时刻与观测时刻之差）指数衰减的，因此我们首先介绍分块带状矩阵求逆后的指数衰减性质。随后，我们讨论如何在不同的分析思路下应用该结果，包括规约至光滑在线凸优化问题的方法，以及直接利用含约束优化问题 Lagrangian 量的 KKT 矩阵的方法。

#### B.1.1 分块带状矩阵求逆后的指数衰减性质

本节考虑一类分块矩阵  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ：称  $A$  具有（对称）分块特征  $(n_1, \dots, n_\omega)$ ，如果  $N = n_1 + \dots + n_\omega$  是对  $N$  的划分，且  $A$  被划分为  $\omega \times \omega$  个子块

$$A := \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\omega} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\omega,1} & A_{\omega,2} & \cdots & A_{\omega,\omega} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ 。为便于表示分块带状矩阵的子矩阵，可任取行指标集  $S_R \subseteq \{1, \dots, \omega\}$ （其元素为  $i_1 < \dots < i_{|S_R|}$ ）和列指标集  $S_C \subseteq \{1, \dots, \omega\}$ （其元素为  $j_1 < \dots < j_{|S_C|}$ ），则子矩阵  $A_{S_R, S_C}$ （也记为  $A(S_R, S_C)$ ）定义为下述分块矩阵

$$A_{S_R, S_C} := \begin{bmatrix} A_{i_1, j_1} & A_{i_1, j_2} & \cdots & A_{i_1, j_{|S_C|}} \\ A_{i_2, j_1} & A_{i_2, j_2} & \cdots & A_{i_2, j_{|S_C|}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_{|S_R|}, j_1} & A_{i_{|S_R|}, j_2} & \cdots & A_{i_{|S_R|}, j_{|S_C|}} \end{bmatrix}.$$

特别地，对于对角阵  $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_\omega)$  和指标集  $S \subseteq \{1, \dots, \omega\}$ （其元素为  $i_1 < \dots < i_{|S|}$ ），子矩阵  $D_S$  定义为分块对角矩阵  $\text{diag}(D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_{|S|}})$ 。

**引理 B.1.** 设  $A$  是正定的对称分块矩阵，其分块特征为  $(n_1, \dots, n_\omega)$ ，各子块用  $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$  表示。假设  $A$  在分块意义下是  $q$ -带状矩阵 ( $q$ -banded matrix)，即

$$A_{i,j} = \mathbf{0}, \quad \forall |i - j| > q/2;$$

并设其最大、最小特征值为  $\lambda_{\min}(A) = a_0$ ,  $\lambda_{\max}(A) = b_0$ , 则有  $\|A\| \leq C_0 \lambda_0^\delta$ , 其中

$$C_0 = \frac{2}{a_0}, \quad \lambda_0 = \left( \frac{\sqrt{\text{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A)} + 1} \right)^{2/q}, \quad \delta = \min_{i \in S_R, j \in S_C} |i - j|.$$

这里  $\text{cond}(A) = b_0/a_0$  表示矩阵  $A$  的条件数 (*condition number*)。

**证明.** 该引理的证明受到 [61] 的启发。考虑以下两种情况：

- 若  $\delta \neq 0$ , 设  $\delta = \nu q/2 + \kappa$ , 其中  $\nu, \kappa$  满足  $\nu \geq 0, 1 \leq \kappa \leq q/2$ 。类似于 [61] 中的命题 2.2, 可以证明: 存在  $\nu$  次多项式  $p_\nu$ , 使得

$$\|A^{-1} - p_\nu(A)\| \leq \frac{1}{a_0} \cdot \frac{(1 + \sqrt{\text{cond}(A)})^2}{2\text{cond}(A)} \lambda_0^\delta \leq C_0 \lambda_0^\delta,$$

其中第二个不等式用到  $\text{cond}(A) \geq 1$ 。由于  $p_\nu$  的次数  $\nu < \frac{2\delta}{q}$ , 而  $A$  是  $q$ -分块带状矩阵, 矩阵  $p_\nu(A)$  对任意  $i \in S_R, j \in S_C$  满足  $(p_\nu(A))_{i,j} = \mathbf{0}$ 。因此

$$\|P\| = \|(A^{-1})_{S_R, S_C}\| = \|(A^{-1} - p_\nu(A))_{S_R, S_C}\| \leq \|A^{-1} - p_\nu(A)\| \leq C_0 \lambda_0^\delta,$$

这里用到子矩阵的 2-范数不可能大于原矩阵的 2-范数这一事实。

- 若  $\delta = 0$ , 结论显然成立, 因为  $\|P\| = \|(A^{-1})_{S_R, S_C}\| \leq \|A^{-1}\| = \frac{1}{a_0} \leq C_0$ 。

这就完成了证明。 ■

**推论 B.2.** 设  $A$  满足引理 B.1 中的一切假设, 并设  $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_\omega)$  是分块对角矩阵, 其中  $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  都是半正定的。令  $M = ((A + D)^{-1})_{S_R, S_C}$  (按行指标  $S_R$  和列指标  $S_C$  取出子矩阵), 其中  $S_R, S_C \subseteq \{1, \dots, \omega\}$ , 则  $\|M\| \leq C_0 \lambda_0^\delta$ , 其中

$$C_0 = \frac{2}{a_0}, \quad \lambda_0 = \left( \frac{\sqrt{\text{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A)} + 1} \right)^{2/q}, \quad \delta = \min_{i \in S_R, j \in S_C} |i - j|.$$

这里  $\text{cond}(A) = b_0/a_0$  表示矩阵  $A$  的条件数 (*condition number*)。

**证明.** 可将其规约至  $D = \mathbf{0}$  的特殊情形, 从而可以利用引理 B.1 的结果。具体而言, 令  $N := a_0 I + D$  ( $N$  显然是对称正定阵), 并定义

$$H = N^{-\frac{1}{2}}(A + D)N^{-\frac{1}{2}}.$$

我们首先证明:  $I \leq H \leq \frac{b_0}{a_0} \cdot I$ 。对任意向量  $x$ , 注意到

$$\begin{aligned} x^\top H x &= x^\top N^{-\frac{1}{2}} A N^{-\frac{1}{2}} x + x^\top N^{-\frac{1}{2}} D N^{-\frac{1}{2}} x \\ &\geq x^\top N^{-\frac{1}{2}} a_0 I N^{-\frac{1}{2}} x + x^\top N^{-\frac{1}{2}} D N^{-\frac{1}{2}} x \\ &= x^\top N^{-\frac{1}{2}} (a_0 I + D) N^{-\frac{1}{2}} x \end{aligned}$$



$$= \|x\|^2,$$

以及

$$\begin{aligned} x^\top H x &= x^\top N^{-\frac{1}{2}} A N^{-\frac{1}{2}} x + x^\top N^{-\frac{1}{2}} D N^{-\frac{1}{2}} x \\ &\leq x^\top N^{-\frac{1}{2}} b_0 I N^{-\frac{1}{2}} x + x^\top N^{-\frac{1}{2}} D N^{-\frac{1}{2}} x \\ &= x^\top N^{-\frac{1}{2}} (a_0 I + D) N^{-\frac{1}{2}} x + (b_0 - a_0) x^\top N^{-1} x \\ &\leq \|x\|^2 + \frac{b_0 - a_0}{a_0} \cdot \|x\|^2 \\ &= \frac{b_0}{a_0} \cdot \|x\|^2, \end{aligned}$$

因此确实有  $I \leq H \leq \frac{b_0}{a_0} \cdot I$ , 从而  $\text{cond}(H) \leq \frac{b_0}{a_0} = \text{cond}(A)$ 。注意到  $H$  同样是  $q$ -带状分块矩阵, 利用引理 B.1 的结果知

$$\left\| (H^{-1})_{S_R, S_C} \right\| \leq 2\lambda_H^\delta \leq 2\lambda_0^\delta,$$

其中  $\lambda_H = \left( \frac{\sqrt{\text{cond}(H)-1}}{\sqrt{\text{cond}(H)+1}} \right)^{2/q} \leq \lambda_0$ 。进而,

$$\begin{aligned} \|P\| &= \left\| ((A + D)^{-1})_{S_R, S_C} \right\| = \left\| \left( N^{-\frac{1}{2}} H^{-1} N^{-\frac{1}{2}} \right)_{S_R, S_C} \right\| \\ &\leq \left\| (a_0 I + D_{S_R})^{-\frac{1}{2}} \right\| \cdot \left\| (H^{-1})_{S_R, S_C} \right\| \cdot \left\| (a_0 I + D_{S_C})^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq \frac{1}{a_0} \left\| (H^{-1})_{S_R, S_C} \right\| \\ &\leq C_0 \lambda_0^\delta, \end{aligned}$$

其中用到  $\left\| (a_0 I + D_S)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}}$  以及  $D_S \geq 0$ 。 ■

最后, 我们简要探讨最优控制型的优化问题与带状分块矩阵求逆间的联系。对目标函数具有一定光滑性和凸性的无约束优化问题, 若参数沿方向  $e$  作一微小变化, 则利用最优性条件 (如 KKT 条件), 总可以将优化问题的解  $\psi$  在方向  $e$  上的变化  $\frac{\partial \psi}{\partial e}$  在局部表示为线性方程  $H \frac{\partial \psi}{\partial e} = \delta$ 。其中, 系数矩阵  $H$  是目标函数的 Hessian 矩阵,  $\delta$  是与参数变化量成线性关系的小量。如此, 优化问题的解对微扰的响应 (在局部) 可以表示为  $\frac{\partial \psi}{\partial e} = H^{-1} \delta$ 。进而, 注意到最优控制型优化问题具有局部耦合性质 (只有相邻时刻的优化变量出现在同一阶段代价中), 这一特殊结构保证了  $H$  是带状分块矩阵 (在最常见的情况下, 甚至是三对角矩阵 (*tri-diagonal matrix*)), 因此其逆矩阵  $H^{-1}$  从主对角线向两侧必然呈现指数衰减特征, 故局部微扰响应的上界即可通过展开  $\left\| \frac{\partial \psi}{\partial e} \right\| = \|H^{-1} \delta\|$  得到。对于优化问题

含约束的情形，则可以相应地考虑 KKT 矩阵  $K$ （参见 4.2 节的证明）。

### B.1.2 规约至光滑在线凸优化问题

光滑在线凸优化问题 (*smoothed online convex optimization, SOCO*) 是一类与最优控制密切相关的优化问题，只不过在观念上将其视为一个静态问题（下标  $t$  不具有“阶段”的概念），从而消去了系统动力学给出的等式约束；同时，优化变量中只含系统状态而不含控制输入（关于代价函数可改写为关于现态和次态的形式）。例如，对于含加性噪声的线性时变系统，最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t) + f_t^u(u_t)) + F_T(x_T) \\ \text{subject to} \quad & x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

而对给定的初态  $\hat{x}_0$ 、末态  $\hat{x}_p$  和噪声序列  $\hat{w}$ （在变量上添加尖角符，是为了强调它们是规约后问题的参量），相应的光滑在线凸优化问题可写为

$$\hat{\psi}(\hat{x}_0, \hat{w}, \hat{x}_p) := \arg \min_{\hat{x}_{1:p-1}} \sum_{\tau=1}^{p-1} \hat{f}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}) + \sum_{\tau=1}^p \hat{c}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}, \hat{x}_{\tau-1}, \hat{w}_{\tau-1}), \quad (\text{B.2})$$

其中优化变量  $\hat{x}_{1:p-1}$  可以自由地在全空间选取。由于后者相比于前者不含动力学方程的等式约束，在进行微扰分析时后者无疑显得更加便利。

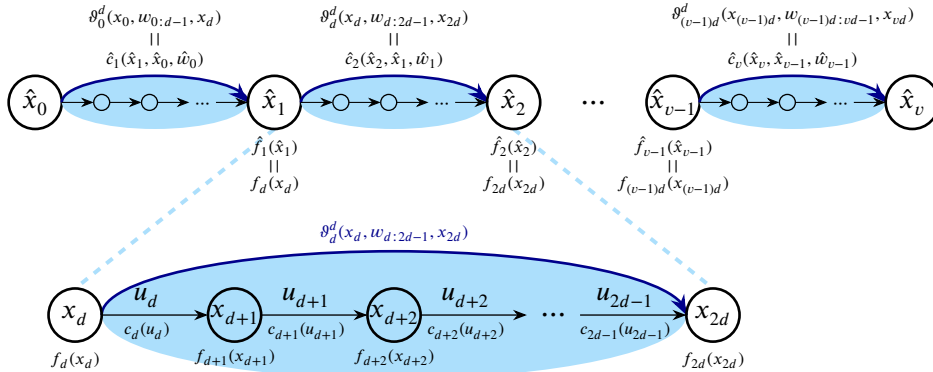


图 B.1 从最优控制问题到光滑在线凸优化问题的规约示意

那么，是否只要将动力学方程代入转移代价函数，就能将最优控制问题规约至光滑在线凸优化问题呢？答案显然是否定的，因为对欠驱动的 (*under-actuated*) 系统而言，不能保证每一时刻系统状态都能自由地在状态空间  $\mathbb{R}^n$  中选取。为此，回忆我们在定义 2.5 中引入的可控性指数  $d$ ，它保证我们可以在  $d$  步内将系统驱

动至任意目标状态，而最优性原理 (*optimality principle*) 保证我们可以通过反解  $\psi_t^d(x_t, w_{t:t+d-1}, x_{t+d})$  得到这  $d$  步内的轨迹；换言之，只要将决策点 (*decision point*) 的时间间隔从 1 延长至  $d$  (即每  $d$  步允许决定一个目标状态)，就可以完成规约。上图 B.1 直观地展示了这种规约 (图中展示了一个从 0 时刻起的简单特例，并为简单起见规定决策点  $p = vd$ )。

在规约后，利用前一节中给出的思路，通常可证明光滑在线凸优化问题 (在一定的光滑性要求下) 具有以下形式的微扰响应上界

$$\|\hat{\psi}(\hat{x}_0, \hat{w}, \hat{x}_p)_h - \hat{\psi}(\hat{x}'_0, \hat{w}', \hat{x}'_p)_h\| \leq C_0 \left( \lambda_0^{h-1} \|\hat{x}_0 - \hat{x}'_0\| + \sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_0^{|h-\tau|-1} \|\hat{w}_\tau - \hat{w}'_\tau\| + \lambda_0^{p-h-1} \|\hat{x}_p - \hat{x}'_p\| \right).$$

因此，为导出最优控制问题的微扰响应上界，只需要考察规约后的目标函数是否具有良好的光滑性和凸性，以及反解相邻决策点之间的子轨迹时是否仍能保持解的 Lipschitz 连续性。具体而言，我们需要证明以下辅助结论：

- $\psi_t^p(x, w_{t:t+p-1}, z; \mathbb{I})$  具有 Lipschitz 连续性；
- $\partial_t^p(x, w_{t:t+p-1}, z; \mathbb{I})$  具有凸性和 L-光滑性。

关于本例的具体证明细节及其应用，可以参见附录 B.2。

### B.1.3 KKT 矩阵及其微扰分析

**一般优化问题的 KKT 矩阵** 对于一般的优化问题 (优化变量为  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha}{\text{minimize}} && f(\alpha) \\ & \text{subject to} && g(\alpha) = 0, \end{aligned}$$

考虑其原始-对偶解 (*primal-dual solution*)  $(\alpha, \eta)$ ，其中  $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_m]$  分别对应等式约束  $g_1(\alpha) = 0, \dots, g_m(\alpha) = 0$ 。该优化问题的 *Lagrangian* 量为

$$\mathcal{L}(\alpha, \eta) := f(\alpha) + \eta^\top g(\alpha),$$

其 *Hessian* 矩阵定义为  $H := \nabla_{\alpha\alpha}^2 \mathcal{L}(\alpha, \eta)$ ，而约束条件的 *Jacobian* 矩阵定义为  $G := \nabla_{\alpha} g(\alpha)$ ；进而，其 *KKT* 矩阵 (*Karush-Kuhn-Tucker matrix*) 定义为

$$K = \begin{bmatrix} H & G^\top \\ G & \end{bmatrix}.$$

下面的引理表明：若 *Hessian* 矩阵  $H$  和约束条件的 *Jacobian* 矩阵  $G$  都具有有界的奇异值谱，则 *KKT* 矩阵也具有有界的奇异值谱。

引理 B.3. 若 KKT 矩阵  $K$  的分块形式中, Hessian 矩阵  $H \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$  是对称正定阵, 且满足  $\underline{\sigma}_H I \leq H \leq \bar{\sigma}_H I$  ( $\underline{\sigma}_H > 0$ ); 而约束条件的 Jacobian 矩阵  $G \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_0}$  满足  $n_1 \leq n_0$  且  $\underline{\sigma}_G \leq \sigma(G) \leq \bar{\sigma}_G$  ( $\underline{\sigma}_G > 0$ ), 则 KKT 矩阵  $K$  的奇异值谱满足

$$\min(\underline{\sigma}_H, 1) \cdot \bar{\sigma}_G \cdot \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_H}{2\underline{\sigma}_H \bar{\sigma}_H + \underline{\sigma}_H (\underline{\sigma}_G)^2}} \leq \sigma(K) \leq \sqrt{2(\bar{\sigma}_H + \bar{\sigma}_G)}.$$

证明. 首先给出  $\sigma(H)$  的下界. 考虑  $GH^{-\frac{1}{2}}$  的奇异值分解

$$GH^{-\frac{1}{2}} = U \Sigma V^T,$$

其中  $U \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ 、 $V \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$  是酉矩阵,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_0}$  包含了  $GH^{-\frac{1}{2}}$  的全部奇异值, 且满足  $\frac{\bar{\sigma}_G}{\sqrt{\underline{\sigma}_H}} \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{n_1} \geq \frac{\underline{\sigma}_G}{\sqrt{\bar{\sigma}_H}}$ . 则有分解

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} H^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & H^{-\frac{1}{2}} G^T \\ GH^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ 0 & U^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

注意到对任意  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_0}$ 、 $\beta \in \mathbb{R}^{n_1}$ , 都有

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} I & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{n_1} (\alpha_i + \sigma_i \beta_i)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_0} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \left( \left( 1 + \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \left( \alpha_i + \frac{2\sigma_i}{2 + \sigma_i^2} \beta_i \right)^2 + \frac{\sigma_i^2}{2} \alpha_i^2 + \frac{\sigma_i^2}{2 + \sigma_i^2} \beta_i^2 \right) + \sum_{i=n_1+1}^{n_0} \alpha_i^2 \\ &\geq \left( \min_i \frac{\sigma_i^2}{2 + \sigma_i^2} \right) \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\geq \frac{\underline{\sigma}_H (\underline{\sigma}_G)^2}{2\underline{\sigma}_H \bar{\sigma}_H + \bar{\sigma}_H (\bar{\sigma}_G)^2} \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

因此, 由 (B.3) 有

$$\left\| K \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\| \geq \min(\underline{\sigma}_H, 1) \cdot \bar{\sigma}_G \cdot \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_H}{2\underline{\sigma}_H \bar{\sigma}_H + \bar{\sigma}_H (\bar{\sigma}_G)^2}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|.$$

这就证明了下界. 上界则可以直接通过放缩得到, 即

$$\left\| K \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\| \leq \|H\alpha + G^T \beta\| + \|G\alpha\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|H\alpha\| + \|G^\top \beta\| + \|G\alpha\| \\
&\leq (\bar{\sigma}_H + \bar{\sigma}_G)(\|x\| + \|y\|) \\
&\leq \sqrt{2}(\bar{\sigma}_H + \bar{\sigma}_G) \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|.
\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明。 ■

**有限时间最优控制问题的 KKT 矩阵** 现在考虑一般形式的有限时间最优控制问题（见定义 2.4）。为使表述简洁，本节只考虑不含额外不等式约束的情形，则优化问题只含动力学方程对应的等式约束。此时，将其优化变量（有序地）记为  $\alpha = (\alpha_{t_1}, \alpha_{t_1+1}, \dots, \alpha_{t_2})$ ，其中

$$\alpha_t = \begin{cases} (x_t, u_t) & t_1 \leq t < t_2 \\ x_{t_2} & t = t_2 \end{cases}.$$

则优化问题的目标函数为  $f(\alpha) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} f_t(\alpha_t; \xi_t) + F_{t_2}(\alpha_{t_2})$ ，动力学方程给出的等式约束可记为  $g(\alpha) := (\tilde{g}_{t_1+1}, \dots, \tilde{g}_{t_2}) = 0$ ，其中  $\tilde{g}_{t_1}(\alpha_{t_1}) = x_{t_1} - z$ ， $\tilde{g}_{t+1}(\alpha_{t:t+1}) = x_{t+1} - g_t(x_t, u_t)$  ( $t = t_1 + 1, \dots, t_2 - 1$ )。设等式约束  $\tilde{g}_{t_1}, \dots, \tilde{g}_{t_2}$  的对偶变量 (*dual variable*) 分别为  $\eta = (\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_2})$ ，则优化问题的 Lagrangian 量即为  $\mathcal{L}(\alpha, \eta) = f(\alpha) + \eta^\top \tilde{g}(\alpha)$ ，其 KKT 矩阵在一点  $(\alpha, \eta)$  处的具体表达式为

$$\begin{bmatrix}
H_{t_1} & & & & I & -A_{t_1}^\top & & & & \\
& & & & -B_{t_1}^\top & & & & & \\
& & & & I & -A_{t_1+1}^\top & & & & \\
& & & & & -B_{t_1+1}^\top & & & & \\
& & & & & I & & \ddots & & \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & & I \\
\hline
I & & & & & & & & & \\
-A_{t_1} & -B_{t_1} & I & & & & & & & \\
& & -A_{t_1+1} & -B_{t_1+1} & I & & & & & \\
& & & & \ddots & \ddots & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & I
\end{bmatrix}.$$

其中，子块  $H_t$ 、 $A_t$ 、 $B_t$  定义如下：



我们还指出：KKT 矩阵的具体形式必然随所考虑优化问题的形式而变。例如，当问题含额外的不等式约束时，约束的 Jacobian 矩阵将变得更复杂。又如，若直接将初态  $z$  代入优化问题，而不将其视为优化变量，则可消去等式约束  $x_{t_1} = z$ ，从而  $H_{t_1}$ 、 $G$  的形式都将被改写（相当于在  $K$  中删去第一行和第一列）。然而，这些改动通常不影响 KKT 矩阵的整体性质，下面的讨论在稍加改动后仍然适用。

**KKT 矩阵的微扰分析** 在 B.1.1 节末提出的分析思路中，我们假定系统的动力学方程没有预测误差，从而 KKT 矩阵（Hessian 矩阵）总是准确的。然而，为了研究动力学方程的预测误差对控制器的影响，也有必要刻画 KKT 矩阵的微扰响应。本节将给出其中一种基本情形，即线性二次型调节器系统中 KKT 矩阵的微扰响应上界。为了方便应用引理 B.1，这里直接分析基变换后的矩阵  $Y$ ，即

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} Q_{t_1} & I & & & -A_0^\top & & & \\ & R_{t_1} & & & -B_0^\top & & & \\ I & & & & & & & \\ \hline & & Q_{t_1+1} & I & & -A_1^\top & & \\ & & & R_{t_1+1} & & -B_1^\top & & \\ -A_0 & -B_0 & I & & & & & \\ \hline & & & & & & I & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & -A_1 & -B_1 & I & & & \\ \hline & & & & & & & Q_{t_2} & I \\ & & & & & & & I & \end{array} \right] .$$

引理 B.4. 若  $H$  中每一个子块（即  $Q_t$  和  $R_t$ ）的特征值都包含于区间  $[\mu, \ell]$ ， $G$  满足  $\sigma_{\min}(G) \geq \sigma$ ，而矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  关于参数  $\xi$  分别是  $L_A$ 、 $L_B$ 、 $L_Q$ 、 $L_R$ -Lipschitz 连续的，则矩阵  $Y_{t_1}^{t_2}$  的逆满足

$$\left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} \right)_{i,j} \right\| \leq C_K \lambda_K^{|i-j|}, \quad \forall i, j \in [t, T], \quad \forall \xi_{t:T} \in \Xi_{t:T}. \quad (\text{B.4})$$

进而，对于不同的不确定性参数  $\xi_{t_1:t_2}, \xi'_{t_1:t_2} \in \Xi_{t_1:t_2}$ ，KKT 矩阵的逆  $(Y_t^T(\xi_{t:T}))^{-1}$  和  $(\hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k}))^{-1}$  满足微扰响应上界

$$\left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2})^{-1} \right)_{i,j} \right\| \leq C'_K \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau-j|} \cdot \|\xi_\tau - \xi'_\tau\|, \quad (\text{B.5})$$

其中常数  $C_K$ 、 $C'_K$ 、 $\lambda_K$  由下式给出

$$\begin{aligned}\lambda_K &= \left( \frac{\bar{\sigma}_K - \underline{\sigma}_K}{\bar{\sigma}_K + \underline{\sigma}_K} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_K = \frac{4(\ell + 1 + a + b)}{\underline{\sigma}_K^2 \cdot \lambda_K}, \\ C'_K &= C_K^2 \left( \max\{L_Q + L_R, L_P\} + \frac{2}{\lambda_K}(L_A + L_B) \right), \\ \underline{\sigma}_K &= \min\{\mu, 1\} \cdot (a + b + 1) \cdot \sqrt{\frac{\ell}{2\mu\ell + \mu\sigma^2}}, \\ \bar{\sigma}_K &= \sqrt{2}(\ell + a + b + 1).\end{aligned}$$

**证明.** 由引理 B.3,  $Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2$  是正定的 4-带状分块矩阵, 其奇异值谱有上下界

$$\underline{\sigma}_K^2 I \leq Y_t^T(\xi_{t:T})^2 \leq \bar{\sigma}_K^2 I.$$

因此, 应用引理 B.1, 即得到

$$\left( \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2 \right)^{-1} \right)_{i,j} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}_K} \cdot \lambda_K^{|i-j|}. \quad (\text{B.6})$$

再利用  $Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} = Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) \cdot \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2 \right)^{-1}$ , 我们还可进而得到

$$\begin{aligned}\left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} \right)_{i,j} &= \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) \cdot \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2 \right)^{-1} \right)_{i,j} \\ &= \sum_{k=t_1}^{t_2} Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})_{i,k} \cdot \left( \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2 \right)^{-1} \right)_{k,j} \\ &= \sum_{k=i-1}^{i+1} Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})_{i,k} \cdot \left( \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^2 \right)^{-1} \right)_{k,j}.\end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

将 (B.7) 代入 (B.6), 即得

$$\left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} \right)_{i,j} \right\| \leq \frac{4(\ell + 1 + a + b)}{\underline{\sigma}_K^2 \cdot \lambda_K} \cdot \lambda_K^{|i-j|}, \quad \forall i, j \in [t_1, t_2]. \quad (\text{B.8})$$

进而, 注意到 KKT 矩阵的逆矩阵对不确定性参数的扰动响应可表示为

$$Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2})^{-1} = -(Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}))^{-1} \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right) Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1}. \quad (\text{B.9})$$

由于 (B.9) 的右边关于不同子块的扰动是线性可加的, 因此我们可以分别研究对



不同子块的扰动，再将其相加。具体而言，对子块的扰动可分为以下三类：

$$\begin{aligned}\Pi_\tau &:= (Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & E_\tau & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} (Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}))^{-1}, \quad \forall \tau \in [t_1, t_2], \\ \Pi_\tau^L &:= (Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & E'_\tau & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} (Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}))^{-1}, \quad \forall \tau \in [t_1, t_2 - 1], \\ \Pi_\tau^U &:= (Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & (E'_\tau)^\top & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} (Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}))^{-1}, \quad \forall \tau \in [t_1, t_2 - 1],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E_\tau &:= \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right)_{\tau\tau}, \quad \forall \tau \in [t_1, t_2], \\ E'_\tau &:= \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right)_{(\tau+1)\tau}, \quad \forall \tau \in [t_1, t_2 - 1].\end{aligned}$$

注意到三类扰动响应分别满足

$$\begin{aligned}\|(\Pi_\tau)_{i,j}\| &\leq \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{i,\tau} \cdot \|E_\tau\| \cdot \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{\tau,j} \\ &\leq C_K^2 \cdot \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau-j|} \cdot \|E_\tau\|, \quad (\text{B.10a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(\Pi_\tau^L)_{i,j}\| &\leq \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{i,\tau} \cdot \|E'_\tau\| \cdot \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{\tau+1,j} \\ &\leq C_K^2 \cdot \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau+1-j|} \cdot \|E'_\tau\|, \quad (\text{B.10b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(\Pi_\tau^U)_{i,j}\| &\leq \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{i,\tau+1} \cdot \|E'_\tau\| \cdot \left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2}) \right)^{-1} \right\|_{\tau,j} \\ &\leq C_K^2 \cdot \lambda_K^{|\tau+1-i|+|\tau-j|} \cdot \|E'_\tau\|, \quad (\text{B.10c})\end{aligned}$$

这里反复用到上界 (B.8)。将这些不等式关于  $\tau$  求和，即得

$$\begin{aligned}&\left\| \left( Y_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1:t_2})^{-1} - Y_{t_1}^{t_2}(\xi'_{t_1:t_2})^{-1} \right)_{i,j} \right\| \\ &= \left\| \sum_{\tau=t_1}^{t_2} (\Pi_\tau)_{i,j} + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} (\Pi_\tau^L)_{i,j} + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} (\Pi_\tau^U)_{i,j} \right\| \quad (\text{B.11a})\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \|(\Pi_\tau)_{i,j}\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \|(\Pi_\tau^L)_{i,j}\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \|(\Pi_\tau^U)_{i,j}\| \quad (\text{B.11b})$$

$$\leq C_K^2 \left( \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau-j|} \cdot \|E_\tau\| + \frac{2}{\lambda_K} \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau-j|} \cdot \|E'_\tau\| \right) \quad (\text{B.11c})$$

$$\leq C_K^2 \left( \max\{L_Q + L_R, L_P\} + \frac{2}{\lambda_K}(L_A + L_B) \right) \sum_{\tau=i_1}^{i_2} \lambda_K^{|\tau-i|+|\tau-j|} \cdot \|\xi_\tau - \xi'_\tau\|. \quad (\text{B.11d})$$

其中, (B.11a) 用到 (B.9), (B.11b) 用到三角不等式, (B.11c) 用到 (B.10), (B.11d) 用到系统参量关于参数  $\xi$  的 Lipschitz 连续性。这就完成了证明。 ■

#### B.1.4 常用的技术性引理

本节给出微扰响应分析中一些常用的技术性引理。下面的引理给出分块矩阵的范数与其子块范数间的联系。

**引理 B.5.** 设矩阵  $A$  是  $\omega_1 \times \omega_2$  分块矩阵, 其中第  $i$  行第  $j$  列的子块记为  $A_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq \omega_1, 1 \leq j \leq \omega_2$ )。则  $A$  的 2-范数有上界

$$\|A\| \leq \left( \sum_{i=1}^{\omega_1} \sum_{j=1}^{\omega_2} \|A_{i,j}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**证明.** 任取单位向量  $x$ , 并将其分块为与  $A$  列适配的形式  $x = (x_1, \dots, x_{\omega_2})$ , 则

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \sum_{i=1}^{\omega_1} \left\| \sum_{j=1}^{\omega_2} A_{i,j} x_j \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\omega_1} \left( \sum_{j=1}^{\omega_2} \|A_{i,j}\| \cdot \|x_j\| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\omega_1} \left( \sum_{j=1}^{\omega_2} \|A_{i,j}\|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{\omega_2} \|x_j\|^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\omega_1} \sum_{j=1}^{\omega_2} \|A_{i,j}\|^2, \end{aligned}$$

其中第二个不等号用到了 Cauchy-Schwarz 不等式。 ■

在求解优化问题时, 可以先固定一部分优化变量  $x$ , 而首先优化其他优化变量  $y$ , 从而消去问题中的变量  $y$ , 得到规模缩小的新问题。下面的引理表明: 部分问题中  $y$  的最优解  $y^*$  与新问题的目标函数  $f(x, y^*(x))$  都将保持一定的光滑性。

**引理 B.6.** 设目标函数  $f(x, y)$  连续可微, 关于优化变量  $(x, y)$  具有凸性和  $\ell$ -光滑性, 且关于  $y$  具有  $\mu$ -强凸性。令  $y^*(x) := \arg \min_y f(x, y)$ ,  $g(x) := \min_y f(x, y)$ , 则函数  $y^*$  具有  $\frac{\ell}{\mu}$ -Lipschitz 连续性, 而函数  $g$  具有  $\left(\ell + \frac{\ell^2}{\mu}\right)$ -光滑性。

**证明.** 我们指出: 由于  $f(x, y)$  关于  $y$  具有  $\mu$ -强凸性, 函数  $y^*(x) = \arg \min_y f(x, y)$

是良定义的（即最优解  $y^*(x)$  唯一）。由最优性条件，对任意  $x, x'$ ，都有

$$\nabla_y f(x, y^*(x)) = 0, \quad \nabla_y f(x', y^*(x')) = 0,$$

进而可得

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y^*(x) - y^*(x'), \nabla_y f(x, y^*(x)) - \nabla_y f(x', y^*(x')) \rangle \\ &= \langle y^*(x) - y^*(x'), \nabla_y f(x, y^*(x)) - \nabla_y f(x, y^*(x')) \rangle \\ &\quad + \langle y^*(x) - y^*(x'), \nabla_y f(x, y^*(x')) - \nabla_y f(x', y^*(x')) \rangle \\ &\geq \mu \|y^*(x) - y^*(x')\|^2 - \|y^*(x) - y^*(x')\| \cdot \|\nabla_y f(x, y^*(x')) - \nabla_y f(x', y^*(x'))\|, \end{aligned}$$

这里用到 Cauchy-Schwartz 及  $\mu$ -强凸函数的性质

$$\langle a - b, \nabla y^*(a) - \nabla y^*(b) \rangle \geq \mu \|a - b\|^2, \quad \forall a, b.$$

进而， $f$  的  $\ell$ -光滑性给出

$$\|y^*(x) - y^*(x')\| \leq \frac{1}{\mu} \|\nabla_y f(x, y^*(x')) - \nabla_y f(x', y^*(x'))\| \leq \frac{\ell}{\mu} \|x - x'\|,$$

这表明函数  $y^*$  是  $\frac{\ell}{\mu}$ -Lipschitz 连续的。同时，注意到  $g$  的梯度满足

$$\nabla g(x) = \nabla_x f(x, y^*(x)) + \nabla_y f(x, y^*(x)) \frac{\partial y^*(x)}{\partial x} = \nabla_x f(x, y^*(x)),$$

这里用到最优性条件  $\nabla_y f(x, y^*(x)) = 0$ 。因此有

$$\begin{aligned} \|\nabla g(x) - \nabla g(x')\| &\leq \|\nabla_x f(x, y^*(x)) - \nabla_x f(x', y^*(x'))\| \\ &\leq \|\nabla_x f(x, y^*(x)) - \nabla_x f(x', y^*(x))\| \\ &\quad + \|\nabla_x f(x', y^*(x)) - \nabla_x f(x', y^*(x'))\| \\ &\leq \ell \|x - x'\| + \ell \|y^*(x) - y^*(x')\| \\ &\leq \left( \ell + \frac{\ell^2}{\mu} \right) \|x - x'\|. \end{aligned}$$

这就完成了证明。 ■

下面的引理刻画了同时具有凸性和  $\ell$ -光滑性的函数，它将两点处的函数值与它们之间距离的平方相联系，并帮助我们引入待定参数  $\eta$ 。

**引理 B.7.** 若函数  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是非负二阶连续可导函数，且具有凸性和  $\ell$ -光滑性，则对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$  及任意  $\eta > 0$ ，都有

$$\phi(x) \leq (1 + \eta)\phi(y) + \frac{\ell}{2} \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \|x - y\|^2. \quad (\text{B.12})$$

证明. 事实上, 利用凸性和  $l$ -光滑性, 不难发现

$$\begin{aligned}\phi(x) - \phi(y) &\leq \langle \nabla \phi(y), x - y \rangle + \frac{\ell}{2} \|x - y\|^2 \\ &\leq \frac{\eta}{2\ell} \|\nabla \phi(y)\|^2 + \frac{\ell}{2\eta} \|x - y\|^2 + \frac{\ell}{2} \|x - y\|^2\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

$$\leq \eta \phi(y) + \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \|x - y\|^2. \quad (\text{B.14})$$

其中, (B.13) 用到广义均值不等式, 而 (B.14) 可由下面的方法推出

$$\begin{aligned}0 &\leq g\left(y - \frac{1}{\ell} \nabla \phi(y)\right) \\ &\leq \phi(y) - \left\langle \nabla \phi(y), \frac{1}{\ell} \nabla \phi(y) \right\rangle + \frac{\ell}{2} \left\| \frac{\nabla \phi(y)}{\ell} \right\|^2 \\ &= \phi(y) - \frac{1}{2\ell} \|\nabla \phi(y)\|^2.\end{aligned}$$

这就完成了证明. ■

## B.2 4.1 节的证明

本节中, 我们首先总结附录 B.1.2 中提出的思路, 并给出其证明。首先证明: 具备一定光滑性条件的光滑在线凸优化问题具有指数衰减的微扰响应上界。

**定理 B.8.** 对于给定的  $(\hat{x}_0, \hat{w}, \hat{x}_p)$ , 考虑光滑在线凸优化问题

$$\hat{\psi}(\hat{x}_0, \hat{w}, \hat{x}_p) := \arg \min_{\hat{x}_{1:p-1}} \sum_{\tau=1}^{p-1} \hat{f}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}) + \sum_{\tau=1}^p \hat{c}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}, \hat{x}_{\tau-1}, \hat{w}_{\tau-1}), \quad (\text{B.15})$$

其中状态代价  $\hat{f}_{\tau} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  具有  $\mu$ -强凸性, 转移代价  $\hat{c}_{\tau} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  具有凸性和  $l$ -光滑性, 且所有代价都是二阶连续可微的。则对一切  $1 \leq h \leq p-1$  都有

$$\begin{aligned}\|\hat{\psi}(\hat{x}_0, \hat{w}, \hat{x}_p)_h - \hat{\psi}(\hat{x}'_0, \hat{w}', \hat{x}'_p)_h\| &\leq \\ C_0 &\left( \lambda_0^{h-1} \|\hat{x}_0 - \hat{x}'_0\| + \sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_0^{|h-\tau|-1} \|\hat{w}_{\tau} - \hat{w}'_{\tau}\| + \lambda_0^{p-h-1} \|\hat{x}_p - \hat{x}'_p\| \right),\end{aligned}$$

其中常数  $C_0 = 2\ell/\mu$ , 衰减因子  $\lambda_0 = 1 - 2 \cdot \left(\sqrt{1 + (2\ell/\mu)} + 1\right)^{-1}$ 。

**证明.** 考虑系统参量  $\hat{\zeta} := (\hat{x}_0, \hat{w}_{0:p-1}, \hat{x}_p)$  的小扰动  $\hat{\zeta}' = \hat{\zeta} + \theta e$ , 其中单位向量  $e = [e_0^{\top}, \delta^{\top}, e_p^{\top}]^{\top}$  刻画了微扰的方向 ( $e_0 \in \mathbb{R}^n$  是对初态  $\hat{x}_0$  的微扰  $\hat{x}'_0 = \hat{x}_0 + \theta e_0$ ,  $e_p \in \mathbb{R}^n$  是对末态  $\hat{x}_p$  的微扰  $\hat{x}'_p = \hat{x}_p + \theta e_p$ , 而  $\delta = [\delta_0, \dots, \delta_{p-1}]$  是对噪声序列  $\hat{w}_{0:p-1}$  的微扰  $\hat{w}'_{0:p-1} = \hat{w}_{0:p-1} + \theta \delta$ ), 而  $\theta \in \mathbb{R}$  刻画了微扰的强度。将优化问题

的目标函数简记为

$$\hat{f}(\hat{x}_{1:p-1}; \hat{\zeta}) = \sum_{\tau=1}^{p-1} \hat{f}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}) + \sum_{\tau=1}^p \hat{c}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}, \hat{x}_{\tau-1}, \hat{w}_{\tau-1}).$$

显然,  $\hat{f}$  关于优化变量  $\hat{x}_{1:p-1}$  是  $\mu$ -强凸的。为更直观地理解强凸性, 可以将目标函数  $\hat{f}$  作分解  $\hat{f} = \hat{f}_a + \hat{f}_b$ , 其中

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\hat{x}_{1:p-1}, \hat{\zeta}) &= \sum_{\tau=1}^{p-1} \frac{\mu}{2} \|\hat{x}_{\tau}\|^2 + \sum_{\tau=1}^p \hat{c}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}, \hat{x}_{\tau-1}, \hat{w}_{\tau-1}), \\ \hat{f}_b(\hat{x}_{1:p-1}, \hat{\zeta}) &= \sum_{\tau=1}^{p-1} \left( \hat{f}_{\tau}(\hat{x}_{\tau}) - \frac{\mu}{2} \|\hat{x}_{\tau}\|^2 \right), \end{aligned}$$

则  $\hat{f}_a$  的 Hessian 矩阵  $H_a$  特征值谱有界, 而  $\hat{f}_b$  的 Hessian 矩阵  $H_b$  半正定。

由于  $\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e)$  是凸函数  $\hat{f}(\cdot, \hat{\zeta} + \theta e)$  的极小值点, 由极值点的一阶条件,

$$\nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e) = 0.$$

将上式对  $\theta$  求导得

$$\begin{aligned} & \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}}^2 \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e) \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e) \\ &= -\nabla_{\hat{x}_0} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e) e_0 \\ & \quad - \nabla_{\hat{x}_p} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e) e_p \\ & \quad - \sum_{\tau=0}^{p-1} \nabla_{w_{\tau}} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e) \mu_{\tau}. \end{aligned}$$

为使记号简明, 定义  $(p-1) \times (p-1)$  分块矩阵

$$H := \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}}^2 \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e),$$

以及  $(p-1) \times 1$  分块矩阵

$$\begin{aligned} R^{(0)} &:= -\nabla_{\hat{x}_0} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e), \\ R^{(p)} &:= -\nabla_{\hat{x}_p} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e), \\ K^{(\tau)} &:= -\nabla_{w_{\tau}} \nabla_{\hat{x}_{1:p-1}} \hat{f}(\hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e), \hat{\zeta} + \theta e), \quad \forall 0 \leq \tau \leq p-1. \end{aligned}$$

其中,  $H$ 、 $R^{(0)}$ 、 $R^{(p)}$  的子块大小为  $n \times n$ , 而  $K^{(\tau)}$  的子块大小为  $n \times r$ 。由于 Lagrangian 量具有局部耦合性质,  $R^{(0)}$ 、 $K^{(0)}$  中只有第一个子块可能是非零的,  $R^{(p)}$ 、 $K^{(p-1)}$  中只有最后一个子块可能是非零的, 而  $K^{(\tau)}$  中只有第  $\tau$  和  $(\tau+1)$  个子块可能是

非零的，因此有

$$\frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e) = H^{-1} \left( R^{(0)} e_0 + R^{(p)} e_p + \sum_{\tau=0}^{p-1} K^{(\tau)} \mu_\tau \right).$$

特别地， $\frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e)$  的第  $h$  分量可展开为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e)_h &= (H^{-1})_{h,1} R_{1,1}^{(0)} e_0 + (H^{-1})_{h,p-1} R_{p-1,1}^{(p)} e_p \\ &\quad + (H^{-1})_{h,1} K_{1,1}^{(0)} \mu_0 + (H^{-1})_{h,p-1} K_{p-1,1}^{(p-1)} \mu_{p-1} \\ &\quad + \sum_{\tau=1}^{p-2} (H^{-1})_{h,\tau:\tau+1} K_{\tau:\tau+1,1}^{(\tau)} \mu_\tau. \end{aligned}$$

由于转移代价  $c_\tau$  都具有  $l$ -光滑性，矩阵  $R_{1,1}^{(0)}$ 、 $R_{p-1,1}^{(p)}$ 、 $K_{1,1}^{(0)}$ 、 $K_{p-1,1}^{(p-1)}$ 、以及  $K_{\tau:\tau+1,1}^{(\tau)}$  ( $1 \leq \tau \leq p-2$ ) 的范数都有上界  $l$ 。因此，在上式两边取范数，即得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e)_h \right\| &\leq l \|(H^{-1})_{h,1}\| \|e_0\| + l \|(H^{-1})_{h,p-1}\| \|e_p\| \\ &\quad + l \|(H^{-1})_{h,1}\| \|\mu_0\| + l \|(H^{-1})_{h,p-1}\| \|\delta_{p-1}\| \\ &\quad + \sum_{\tau=1}^{p-2} l \|(H^{-1})_{h,\tau:\tau+1}\| \|\delta_\tau\|. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

将 Hessian 矩阵  $H$  参照目标函数  $\hat{f}$  拆分为  $H = H_a + H_b$ ，其中

$$\begin{aligned} H_a &:= \nabla_{1:p-1}^2 \hat{f}_a(\hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e), \hat{\xi} + \theta e), \\ H_b &:= \nabla_{1:p-1}^2 \hat{f}_b(\hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e), \hat{\xi} + \theta e). \end{aligned}$$

注意到： $H_a$  是三对角分块矩阵，且满足  $(\mu + 2l)I \geq H_a \geq \mu I$ ； $H_b$  是对角分块矩阵，且满足  $H_b \geq 0$ 。因此，由推论 B.2 可得

$$\|(H^{-1})_{h,1}\| \leq \frac{2}{\mu} \lambda_0^{h-1}, \quad \|(H^{-1})_{h,p-1}\| \leq \frac{2}{\mu} \lambda_0^{p-h-1}, \quad \|(H^{-1})_{h,\tau:\tau+1}\| \leq \frac{2}{\mu} \lambda_0^{|h-\tau|-1},$$

其中衰减因子  $\lambda_0$  由下式确定

$$\lambda_0 := \frac{\sqrt{\text{cond}(H_a)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(H_a)} + 1} = 1 - 2 \cdot \left( \sqrt{1 + (2l/\mu)} + 1 \right)^{-1}.$$

代入 (B.16)，即得

$$\left\| \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\xi} + \theta e)_h \right\| \leq C_0 \left( \lambda_0^{h-1} \|e_0\| + \sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_0^{|h-\tau|-1} \|\delta_\tau\| + \lambda_0^{p-h-1} \|e_p\| \right),$$

其中  $C_0 = 2\ell/\mu$ 。最后，将上式沿  $\hat{\zeta}$  和  $\hat{\zeta}'$  的连线积分，得到

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}(\hat{\zeta})_h - \hat{\psi}(\hat{\zeta} + e)_h\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e)_h d\theta \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{d\theta} \hat{\psi}(\hat{\zeta} + \theta e)_h \right\| d\theta \\ &\leq C_0 \left( \lambda_0^{h-1} \|e_0\| + \sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_0^{|h-\tau|-1} \|\delta_\tau\| + \lambda_0^{p-h-1} \|e_p\| \right). \end{aligned}$$

这就完成了证明。 ■

下面，我们希望像之前所讨论的那样，通过切分轨迹至长为  $p \geq d$  的小段（ $d$  为系统的可控性指数）、并将分点（决策点）的演化视为一个全驱动系统，将最优控制问题规约至光滑在线凸优化问题（其时长至多为原始问题的  $1/d$  倍）。为此，还需考察规约后状态代价和转移代价是否具有良好的光滑性和凸性。显然，各决策点处的状态代价保持不变，而转移代价  $\vartheta_t^p(x_t, w_{t:t+p-1}, \zeta_{t+p})$  定义为

$$\vartheta_t^p(z, w, \zeta_{t+p}) := t_t^p(z, w, \zeta_{t+p}; \mathbb{I}) - f_{t+p}(\zeta_{t+p}), \quad (\text{B.17})$$

需要证明其光滑性。此外，将 SOCO 问题的解还原至最优控制问题的解时，需要通过  $\psi_t^{t+p}$  反解决策点间的受控轨迹，从而还需保证解是 Lipschitz 连续的。总而言之，可以将规约所需的全部性质总结为以下引理。

**引理 B.9.** 在假设 4.1 下，对任意正整数  $p \geq d$ ，都有

- ①  $\psi_t^{t+p}(z, w, \zeta_{t+p}; \mathbb{I})$  关于  $(z, w, \zeta_{t+p})$  具有  $L_1(p)$ -Lipschitz 连续性；
- ②  $\vartheta_t^p(z, w, \zeta_{t+p})$  关于  $(z, w, \zeta_{t+p})$  具有凸性和  $L_2(p)$ -Lipschitz 光滑性。

这里常数  $L_1(p) = C(p)(1 + \ell \cdot C(p)/\mu)$ ， $L_2(p) = \ell \cdot C(p)^2 + \ell^2 \cdot C(p)^4/\mu$ 。

**证明.** 参见 [48] 中引理 3.2 的证明。 ■

现在，我们已经做好准备，可以得到系统的微扰响应上界了。

**定理 B.10.** 在假设 4.1 下，对任意正整数  $p \geq d$  和任意终端代价函数  $F$ （允许是光滑函数或指示函数  $\mathbb{I}$ ），对任意时刻  $t$  及参数  $(z, w, \zeta_{t+p})$ 、 $(z', w', \zeta'_{t+p})$ ，都有

$$\begin{aligned} &\left\| \psi_t^{t+p}(z, w_{t:t+p-1}, \zeta_{t+p}; F)_{y_h} - \psi_t^{t+p}(z', w'_{t:t+p-1}, \zeta'_{t+p}; F)_{y_h} \right\| \\ &\leq C \left( \lambda^h \|z - z'\| + \sum_{\tau=t}^{t+p-1} \lambda^{|h-\tau|} \|w_\tau - w'_\tau\| + \lambda^{p-h} \|\zeta_{t+p} - \zeta'_{t+p}\| \right). \end{aligned}$$

其中，常数  $L_0 = \max_{d \leq p \leq 2d-1} L_2(p)$ ，衰减因子及常系数分别为

$$\lambda = \left( 1 - 2 \left( \sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1 \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2d-1}},$$

$$C = \frac{2L_0}{\mu} \cdot \left(1 - 2 \left(\sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

证明. 设  $h, p$  满足  $ud \leq h < (u+1)d$ ,  $p = vd + r$ , 其中  $u, v, r \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r < d$ . 为应用上文讨论的规约方法, 选取决策点为

$$y_t, y_{t+d}, \dots, y_{t+(u-1)d}, y_{t+h}, y_{t+(u+2)d}, \dots, y_{t+(v-1)d}, y_{t+p},$$

并将其记为  $y_{i_0}, \dots, y_{i_{v-1}}$ . 在规约后的问题中, 第  $(\tau-1)$  时刻的系统噪声定义为  $\hat{w}_{\tau-1} = w_{i_{\tau-1}:i_{\tau-1}} \in \mathbb{R}^{n \times (i_{\tau} - i_{\tau-1})}$ . 由于相邻决策点的间隔总在  $[d, 2d)$  之间, 可以应用引理 B.9, 证明规约后的各转移代价  $\mathcal{J}_t^{i_{\tau} - i_{\tau-1}}(\hat{x}_{i_{\tau-1}}, \hat{w}_{\tau-1}, \hat{x}_{i_{\tau}})$  都具有凸性和  $L_2(i_{\tau} - i_{\tau-1})$ -光滑性, 从而也是  $L_0$  光滑的. 因此, 由定理 B.8 得

$$\begin{aligned} & \left\| \psi_t^{t+p}(z, w, \zeta_{t+p}; F)_{y_h} - \psi_t^{t+p}(z', w', \zeta'_{t+p}; F)_{y_h} \right\| \\ &= \left\| \hat{\psi}(z, \hat{w}, \zeta_{t+p})_u - \hat{\psi}(z', \hat{w}', \zeta'_{t+p})_u \right\| \\ &\leq C_0 \left( \lambda_0^{u-1} \|z - z'\|_2 + \sum_{\tau=0}^{v-2} \lambda_0^{u-\tau-1} \|\hat{w}_{\tau} - \hat{w}'_{\tau}\|_2 + \lambda_0^{(v-1)-u-1} \|\zeta_{t+p} - \zeta'_{t+p}\|_2 \right) \\ &= C_0 \left( \lambda_0^{u-1} \|z - z'\|_2 + \sum_{\tau=0}^{v-2} \lambda_0^{u-\tau-1} \sum_{j=i_{\tau}}^{i_{\tau+1}-1} \|w_j - w'_j\|_2 + \lambda_0^{(v-1)-u-1} \|\zeta_{t+p} - \zeta'_{t+p}\|_2 \right) \\ &\leq \frac{C_0}{\lambda_0} \left( \lambda^{i_u - i_0} \|z - z'\|_2 + \sum_{\tau=0}^{v-2} \sum_{j=i_{\tau}}^{i_{\tau+1}-1} \lambda^{|j-i_u|} \|w_j - w'_j\|_2 + \lambda^{i_{v-1} - i_u} \|\zeta_{t+p} - \zeta'_{t+p}\|_2 \right) \\ &= C \left( \lambda^h \|z - z'\| + \sum_{\tau=t}^{t+p-1} \lambda^{|h-\tau|} \|w_{\tau} - w'_{\tau}\| + \lambda^{p-h} \|\zeta_{t+p} - \zeta'_{t+p}\| \right). \end{aligned}$$

这里的常系数和衰减因子由下式给出

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2L_0}{\mu}, \quad \lambda_0 = 1 - 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1\right)^{-1}, \\ C &= \frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{2L_0}{\mu} \left(1 - 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1\right)^{-1}\right)^{-1}, \\ \lambda &= \left(1 - 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2d-1}}. \end{aligned}$$

这就完成了证明. ■

最后, 我们检查应用定理 3.3 所需的全部条件: 系统的微扰响应性质 (性质 3.2) 对  $R = \infty$  成立, 性质 3.1 中的后两条性质已经由假设保证. 因此, 只需要证明 OPT 的稳定性, 而这只需要用到微扰响应上界和系统的一条特殊轨迹.



引理 B.11. 在假设 4.1 下, 任意控制轨迹上的第  $h$  个状态满足

$$\left\| \psi_t^{t+p}(x, w; F)_{y_h} \right\| \leq C \lambda^h \|x\| + \frac{2C}{1-\lambda} \sup_{\tau} \|w_{\tau}\|,$$

从而, 由  $\psi_0^T(x_{\text{init}}, w; F)$  给出的最优控制轨迹 OPT 是 Lyapunov 稳定的。

证明. 为证明此引理, 仅需注意到  $\psi_t^{t+p}(0, 0; F)_{y_h} = 0$ , 故由定理 B.10 可知

$$\begin{aligned} \left\| \psi_t^{t+p}(x, w; F)_{y_h} \right\| &= \left\| \psi_t^{t+p}(x, w; F)_{y_h} - \psi_t^{t+p}(0, 0; F)_{y_h} \right\| \\ &\leq C \left( \lambda_1^h \|x\| + \sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_1^{h-\tau} \|w_{\tau}\| \right) \\ &\leq C \lambda_1^h \|x\| + \frac{2C}{1-\lambda_1} \sup_{\tau} \|w_{\tau}\|, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到  $\sum_{\tau=0}^{p-1} \lambda_1^{h-\tau} \leq \frac{2}{1-\lambda_1}$ 。这就完成了证明。 ■

最后, 我们只需要应用定理 3.3, 就能得到所需的动态超额代价上界。

定理 4.1 的证明. 容易验证: 假设 4.1 和引理 B.11 保证性质 3.1 成立; 定理 B.10 则保证性质 3.2 对任意半径  $R$  及函数  $q_1(t) = 0$ 、 $q_2(t) = q_3(t) = H_1 \lambda_1^t$  成立, 其中

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2L_0}{\mu} \cdot \left( 1 - 2 \left( \sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1 \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ \lambda_1 &= \left( 1 - 2 \left( \sqrt{1 + 2L_0/\mu} + 1 \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2d-1}}. \end{aligned}$$

现在, 仅需要取半径  $R$  为恰当的值。例如, 取  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{L_g H_1^3}{(1-\lambda_1)^3} \right\}$ , 则 MPC $_k$  求解的每一个有限时间最优控制问题中, 终端状态 0 都将在邻域  $\mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  中, 并且定理 3.3 所需的条件在

$$k \geq \ln \left( \frac{H_1^3 L_g}{(1-\lambda_1)^2} \right) / \ln(1/\lambda_1)$$

时成立 (注意到  $\rho_{t,\tau} \leq 1$ )。因此, 直接应用定理 3.3 即完成了证明。 ■

### B.3 4.2 节的证明

本节中, 我们采用附录 B.1.3 提出的分析思路, 即把有限时间最优控制问题  $\psi_{t_1}^{t_2}$  视为优化变量为  $x_{t_1:t_2}$  和  $u_{t_1:t_2-1}$ 、约束条件为动力学方程的凸优化问题, 并利用与上一节类似的方式利用 KKT 条件进行微扰响应分析。

出于技术上的考虑, 本节的优化问题与附录 B.1.3 略有不同: 这里直接代入了初态  $z$ , 而没有包含等式约束  $y_{t_1} = z$ , 因此需要从 KKT 矩阵中移除第一行和



② 注意到假设 4.2 保证  $\mathbf{0}$  是各代价函数的极小值点。解的最优性给出

$$\mathcal{L}(\alpha^*, \eta^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{0}, \eta^*),$$

代入  $f$ 、 $\tilde{g}$  展开，并利用代价函数的  $\mu$ -强凸性，即得

$$\begin{aligned} f(\alpha^*) &= f(\alpha^*) + (\eta^*)^\top \tilde{g}(\alpha^*) \\ &\leq f(\mathbf{0}) + (\eta^*)^\top \tilde{g}(\mathbf{0}) \\ &\leq f(\alpha^*) - \frac{\mu}{2} \|\alpha^*\|^2 + (\eta^*)^\top \tilde{g}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

因此  $\alpha^*$  的模长有上界  $\frac{\mu}{2} \|\alpha^*\|^2 \leq (\eta^*)^\top \tilde{g}(\mathbf{0}) \leq (\eta^*)^\top D_z$ ，进而可知

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_G \|\eta^*\| &\leq \left\| (\nabla_\alpha \tilde{g}(\alpha^*))^\top \eta^* \right\| \\ &= \left\| \nabla_\alpha f(\alpha^*) \right\| \\ &= \left\| \nabla_\alpha f(\alpha^*) - \nabla_\alpha f(\mathbf{0}) \right\| \\ &\leq \ell \|\alpha^*\| \\ &\leq \ell \sqrt{\frac{2}{\mu} \|\eta^*\| \|\tilde{g}(\mathbf{0})\|}, \end{aligned}$$

其中用到 KKT 条件  $\nabla_\alpha f(\alpha^*) + (\nabla_\alpha \tilde{g}(\alpha^*))^\top \eta^* = 0$ ，代价函数的极值条件  $\nabla_\alpha f(\mathbf{0}) = 0$  及其  $\ell$ -强凸性。上式移项得  $\|\eta^*\| \leq \frac{2\ell^2}{\mu \underline{\sigma}_G} D_z$ ，故  $\|\alpha^*\| \leq \frac{2}{\mu} \|\eta^*\| D_z \leq \frac{2\ell}{\mu \underline{\sigma}_G} D_z$ 。

③ 这是②的直接推论。只需注意到  $H = \nabla_{\alpha\alpha}^2 f(\alpha^*) + \nabla_{\alpha\alpha}^2 g(\alpha^*) \eta^*$ ，并且在  $D_z$  充分小时有  $D_z \leq \frac{\mu^2 \underline{\sigma}_G^2}{4\ell^3}$ ，则  $H$  的奇异值谱有上下界

$$\sigma_{\min}(H) \geq \mu - \|\eta^*\| \ell \geq \frac{\mu}{2}, \quad \sigma_{\max}(H) \leq \ell + \|\eta^*\| \ell \leq \ell + \frac{\mu^2 \underline{\sigma}_G^2}{4\ell^2}.$$

因此，可以取  $\underline{\sigma}_H = \frac{\mu}{2}$ ， $\bar{\sigma}_H = \ell + \frac{\mu^2 \underline{\sigma}_G^2}{4\ell^2}$ 。这就完成了证明。  $\blacksquare$

由于在一定条件下， $G$ 、 $H$  都是有界的，因此可以利用引理 B.3，得到 KKT 矩阵  $K$  的逆矩阵的指数衰减性质。注意到引理 B.3 是对重排后的矩阵  $Y$  证明的，为方便后续应用，我们将其恢复为矩阵  $K$ ，并约定各子块的索引为

$$K^{-1} =: \left[ \begin{array}{ccc|ccc} K_{(t_1, t_1), 1}^{-1} & \cdots & K_{(t_1, t_2), 1}^{-1} & K_{(t_1, t_1), 2}^{-1} & \cdots & K_{(t_1, t_2-1), 2}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(t_2, t_1), 1}^{-1} & \cdots & K_{(t_2, t_2), 1}^{-1} & K_{(t_2, t_1), 2}^{-1} & \cdots & K_{(t_2, t_2-1), 2}^{-1} \\ \hline (K_{(t_1, t_1), 2}^{-1})^\top & \cdots & (K_{(t_2, t_1), 2}^{-1})^\top & K_{(t_1, t_1), 3}^{-1} & \cdots & K_{(0, t_2-1), 3}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (K_{(t_2, t_2-1), 2}^{-1})^\top & \cdots & (K_{(t_2, t_2-1), 2}^{-1})^\top & K_{(t_2, t_1), 3}^{-1} & \cdots & K_{(t_2, t_2-1), 3}^{-1} \end{array} \right].$$

基于这一约定，可以较简洁地描述  $K^{-1}$  的指数衰减性质，并总结为如下引理。

**引理 B.13.** 在假设 4.2 下，有限时间最优控制问题  $\psi_{t_1}^{t_2}(\alpha, \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})$  的 KKT 矩阵  $K$  对一切  $0 \leq i \leq T$ 、 $0 \leq j \leq T-1$  和  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  满足

$$\|K_{(i,j),\beta}^{-1}\| \leq C_0 \lambda_0^{|i-j|}. \quad (\text{B.18})$$

**证明.** 由引理 B.12，在  $D_z$  充分小时，矩阵  $H$ 、 $G$  的奇异值谱都是双侧有界的，因此可直接利用引理 B.3。这就完成了证明。 ■

现在，我们已经做好了准备，可以仿照此前定理 B.8 的证明中所做的那样，利用 Lagrangian 量的微分学性质得到最优控制问题的微扰响应上界。

**定理 B.14.** 在假设 4.2 下，有限时间最优控制问题的解满足

$$\begin{aligned} & \left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z', \xi'_{t_1:t_2}; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \\ & \leq C \left( \lambda^{t-t_1} \|z - z'\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda^{|t-\tau|} \|\xi_\tau - \xi'_\tau\| \right), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

其中衰减因子  $\lambda$  和常系数  $C$  由下式确定（式中  $C_0$ 、 $\lambda_0$  由引理 B.1 确定）

$$C = \left( \ell + \frac{\mu^2 \sigma_G^2}{4\ell^2} \right) C_0, \quad \lambda = \lambda_0.$$

**证明.** 该证明的主要思路与定理 B.8 的证明相仿，即考虑参量  $\zeta := (z, \xi_{t_1:t_2})$  的小扰动  $\zeta' = \zeta + \theta e$ ，这里单位向量  $e = (e_0, \delta)$  刻画了微扰的方向（其中  $e_0 \in \mathbb{R}^n$  是对初态  $z$  的微扰  $z' = z + \theta e_0$ ，而  $\delta = (\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_2})$  是对参数序列  $\xi_{t_1:t_2}$  的微扰  $\xi'_{t_1:t_2} = \xi_{t_1:t_2} + \theta \delta$ ），而  $\theta \in \mathbb{R}$  刻画了微扰的强度。又设  $(\alpha^*(\zeta), \eta^*(\zeta))$  是 (4.2) 在给定参量  $\zeta$  时的原始-对偶最优解，则 KKT 条件保证对任意  $\theta \in \mathbb{R}$ ，都有

$$\nabla_\alpha \mathcal{L}(\alpha^*(\zeta'), \eta^*(\zeta'), \zeta') = 0, \quad \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta') = 0.$$

将上式对  $\theta$  求导，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} \left( \nabla_\alpha f(\alpha^*(\zeta'), \zeta') + \nabla_\alpha \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta')^\top \eta^*(\zeta') \right) \\ &= \nabla_{\alpha\alpha}^2 f(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} + \nabla_{\alpha\zeta}^2 f(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\zeta'}{d\theta} + \nabla_\alpha \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta')^\top \frac{d\eta^*(\zeta')}{d\theta} \\ &\quad + \sum_{\tau=t_1+1}^{t_2} \eta_\tau^*(\zeta') \left( \nabla_{\alpha\alpha}^2 \tilde{g}_\tau(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} + \nabla_{\alpha\zeta}^2 \tilde{g}_\tau(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\zeta'}{d\theta} \right) \\ &= H(\alpha^*(\zeta'), \eta^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} + G(\alpha^*(\zeta'), \zeta')^\top \frac{d\eta^*(\zeta')}{d\theta} \\ &\quad + \nabla_{\alpha\zeta}^2 \mathcal{L}(\alpha^*(\zeta'), \eta^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\zeta'}{d\theta}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$0 = \frac{d}{d\theta} \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta') = G(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} + \nabla_{\zeta'} \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta')^\top \frac{d\zeta'}{d\theta}. \quad (\text{B.21})$$

为使记号简明，定义下述四种  $(t_2 - t_1 + 1) \times 1$  分块矩阵：

$$R^{(z)} := -\nabla_z \nabla_{\alpha_{t_1:t_2}} \mathcal{L}(\alpha^*(\zeta'), \zeta'); \quad R^{(\zeta_\tau)} := -\nabla_{\zeta_\tau} \nabla_{\alpha_{t_1:t_2}} \mathcal{L}(\alpha^*(\zeta'), \zeta'), \quad \forall t_1 \leq \tau \leq t_2;$$

$$S^{(z)} := -\nabla_z \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta'); \quad S^{(\zeta_\tau)} := -\nabla_{\zeta_\tau} \tilde{g}(\alpha^*(\zeta'), \zeta'), \quad \forall t_1 \leq \tau \leq t_2.$$

其中， $R^{(z)}$ 、 $S^{(z)}$  的子块大小为  $n \times n$ ，而  $R^{(\zeta_\tau)}$ 、 $S^{(\zeta_\tau)}$  的子块大小为  $n \times d$ 。注意到 Lagrangian 量具有局部耦合性质， $R^{(z)}$ 、 $S^{(z)}$  中只有第一个子块可能是非零的，而  $R^{(\zeta_\tau)}$ 、 $S^{(\zeta_\tau)}$  中只有第  $\tau$ 、 $(\tau + 1)$  个子块可能是非零的。利用上面的记号，可以将 (B.20)、(B.21) 等价地改写为矩阵形式

$$H(\alpha^*(\zeta'), \eta^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} + G(\alpha^*(\zeta'), \zeta')^\top \frac{d\eta^*(\zeta')}{d\theta} = -R^{(z)} e_0 - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} R^{(\zeta_\tau)} \delta_\tau,$$

$$G(\alpha^*(\zeta'), \zeta') \frac{d\alpha^*(\zeta')}{d\theta} = -S^{(z)} e_0 - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} S^{(\zeta_\tau)} \delta_\tau,$$

再将两式合并、移项（注意到合并后系数矩阵即为 KKT 矩阵），可进一步化简得

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} \alpha^*(\zeta + \theta e) \\ \frac{d}{d\theta} \eta^*(\zeta + \theta e) \end{bmatrix} = -K^{-1} \left( \begin{bmatrix} R^{(z)} \\ S^{(z)} \end{bmatrix} e_0 + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} R^{(\zeta_\tau)} \\ S^{(\zeta_\tau)} \end{bmatrix} \delta_\tau \right). \quad (\text{B.22})$$

因此， $\frac{d}{d\theta} \alpha^*(\zeta + \theta e)$  的第  $t$  项由下式给出：

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \alpha^*(\zeta + \theta e)_t &= - \left( K_{(t,t_1),1}^{-1} R_{1,1}^{(z)} + K_{(t,t_1),2}^{-1} S_{1,1}^{(z)} \right) e_0 \\ &\quad - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \left( K_{(t,\tau:\tau+1),1}^{-1} R_{\tau:\tau+1,1}^{(\zeta_\tau)} + K_{(t,\tau:\tau+1),2}^{-1} S_{\tau:\tau+1,1}^{(\zeta_\tau)} \right) \delta_\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

注意到  $f_t$ 、 $g_t$  都具有  $\ell$ -光滑性，由引理 B.12 可知：矩阵  $R_{1,1}^{(z)}$ 、 $S_{1,1}^{(z)}$ 、 $R_{\tau:\tau+1,1}^{(\zeta_\tau)}$  和  $S_{\tau:\tau+1,1}^{(\zeta_\tau)}$  的奇异值谱有上界  $\ell + \frac{\mu^2 \sigma_G^2}{4\ell^2}$ ，因此有（仍将  $\psi_t^T(\zeta; F_T)$  简写为  $\psi_t^T(\zeta)$ ）

$$\left\| \frac{d}{d\theta} \psi(\zeta + \theta e)_{y_t} \right\| \leq \left\| \frac{d}{d\theta} \alpha^*(\zeta + \theta e)_t \right\| \leq C \left( \lambda^{t-t_1} \|e_0\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda^{t-\tau} \|\delta_\tau\| \right). \quad (\text{B.24})$$

最后，仅需沿  $\zeta$  与  $\zeta'$  的连线积分，即得

$$\begin{aligned} \left\| \psi(\zeta)_{y_t} - \psi(\zeta + e)_{y_t} \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \psi(\zeta + \theta e)_{y_t} d\theta \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{d\theta} \psi(\zeta + \theta e)_{y_t} \right\| d\theta \end{aligned}$$

$$\leq C \left( \lambda^{t-t_1} \|e_0\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda^{|t-\tau|} \|\delta_\tau\| \right).$$

这就完成了证明。 ■

我们指出：虽然定理 B.14 反映了对不确定性参量  $\xi_{t_1:t_2-1}$  的微扰响应，但在本节的系统模型中，这些不确定性参量总取真值 ( $\Xi_\tau = \{\xi_\tau^*\}$ ,  $\forall \tau \in [t_1, t_2)$ )，因此我们实际上只用到了  $t_2$  时刻关于终端代价函数参数  $\xi_{t_2}$  的微扰响应。

得到微扰响应上界后，定理 4.2 的证明与定理 4.1 的证明完全一致。

**定理 4.2 的证明.** 我们知道：假设 4.1 保证性质 3.1 成立；定理 B.14 则保证性质 3.2 对任意半径  $R$  及函数  $q_1(t) = 0$ 、 $q_2(t) = q_3(t) = H_2 \lambda_2^t$  成立，其中

$$H_2 = \left( \ell + \frac{\mu^2 \sigma_G^2}{4\ell^2} \right) C_0, \quad \lambda_2 = \lambda_0.$$

现在，仅需要取半径  $R$  为恰当的值。例如，取  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{L_g H_2^3}{(1-\lambda_2)^3} \right\}$ ，则  $\text{MPC}_k$  求解的每一个有限时间最优控制问题中，终端状态  $0$  都将在邻域  $\mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  中，并且定理 3.3 所需的条件在

$$k \geq \ln \left( \frac{H_2^3 L_g}{(1-\lambda_2)^2} \right) / \ln(1/\lambda_2)$$

时成立（注意到  $\rho_{t,\tau} \leq 1$ ）。因此，直接应用定理 3.3 即完成了证明。 ■

## B.4 5.1 节的证明

**直接应用微扰分析基本定理** 细心的读者可能已经注意到，在附录 B.2 中我们还一并建立了关于噪声  $w_t$  的微扰响应上界，这比当时所需的结论要更强一些；同时，由于预测量  $w_t(\xi_t)$  关于  $\xi_t$  是  $L_w$ -Lipschitz 连续的，因此上述微扰响应上界对  $\xi_t$  仍然适用，只是常系数需要乘以  $\max\{1, L_w\}$ 。此外，由于仍假设噪声有界，引理 B.11 在本节也成立。因此，我们可以直接应用微扰分析基本定理。

**定理 5.1 的证明.** 容易验证：假设 4.1 和引理 B.11 保证性质 3.1 成立；定理 B.10 则保证性质 3.2 对任意半径  $R$  及函数  $q_1(t) = 0$ 、 $q_2(t) = q_3(t) = H_3 \lambda_3^t$  成立，其中

$$H_3 = \max\{L_w, 1\} \cdot \frac{2L_0}{\mu} \cdot \left( 1 - 2 \left( \sqrt{1 + (2L_0/\mu)} + 1 \right)^{-1} \right)^{-1},$$

$$\lambda_3 = \left( 1 - 2 \left( \sqrt{1 + (2L_0/\mu)} + 1 \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2d-1}}.$$

现在, 仅需要取半径  $R$  为恰当的值。例如, 取  $R := \max \left\{ D_{x^*}, \frac{2L_g H_3^3}{(1-\lambda_3)^3} \right\}$ , 则  $\text{MPC}_k$  求解的每一个有限时间最优控制问题中, 终端状态  $0$  都将在邻域  $\mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  中, 并且定理 3.3 所需的条件在

$$k \geq \ln \left( \frac{4H_3^3 L_g}{(1-\lambda_3)^2} \right) / \ln(1/\lambda_3)$$

时成立 (注意到  $\rho_{t,\tau} \leq 1$ )。因此, 直接应用定理 3.3 即完成了证明。  $\blacksquare$

**使用一般分析框架** 由于微扰分析基本定理是对最一般的系统证明的, 直接应用定理得到的性能保证相对较弱。本节我们演示如何通过一般分析框架得到更精细的性能保证, 其中用到了例 3.1 的结果。

**定理 5.2 的证明.** 在例 3.1 中, 我们已经证明了次态控制误差平方和的上界

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} e_t^2 &\leq H_3^3 \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=1}^{T-k} \|x_t - x_t^*\|^2 \\ &\quad + H_3^2 \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \rho_{t,\tau}^2 \\ &\quad + H_3^2 \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=k}^{T-1} \|x_t^*\|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

其中常系数  $H_3$  和衰减因子  $\lambda_3$  定义如上 (在例 3.1 中分别记作  $C$ 、 $\lambda$ )。进而有

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \\ &\leq H_3^3 \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=1}^{T-k} \|x_t - x_t^*\|^2 \\ &\quad + H_3^2 \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \rho_{t,\tau}^2 \\ &\quad + H_3^2 \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3} \right) \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=k}^{T-1} \|x_t^*\|^2 \quad (\text{B.26a}) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-k} \|x_t - x_t^*\|^2 \\ &\quad + H_3^2 \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3} \right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau) \end{aligned}$$

$$+ \frac{H_3^2}{\mu} \left(1 + \frac{2H_3L_g^2}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3}\right) \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=k}^{T-1} f_t^x(x_t^*). \quad (\text{B.26b})$$

其中, (B.26a) 是直接应用引理 3.2 的结果 (容易验证其对常数  $C_3 := \frac{H_3}{1-\lambda_3}$  成立), 而 (B.26b) 用到  $f_t^x$  的  $\mu$ -强凸性, 以及假设

$$k \geq \frac{1}{2} \ln \left( H_3^3 \left(1 + \frac{2H_3L_g^2}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3}\right) \right) / \ln(1/\lambda).$$

将上式移项整理, 即得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \\ & \leq H_3^2 \left(1 + \frac{2H_3L_g^2}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1-\lambda_3}\right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau) \\ & \quad + \frac{H_3^2}{\mu} \left(1 + \frac{2H_3L_g^2}{1-\lambda_3}\right) \left(1 + \frac{H_3}{1-\lambda_3}\right) \cdot \lambda_3^{2k} \cdot \sum_{t=k}^{T-1} f_t(x_t^*). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

另一方面, 由于代价函数具有良态性质, 利用引理 B.7 可知: 对任意  $\eta > 0$ , 都有

$$f_t^x(x_t) \leq (1 + \eta) f_t^x(x_t^*) + \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \|x_t - x_t^*\|^2, \quad \forall 0 < t < T; \quad (\text{B.28a})$$

$$f_t^u(u_t) \leq (1 + \eta) f_t^u(u_t^*) + \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \|u_t - u_t^*\|^2, \quad \forall 0 \leq t < T; \quad (\text{B.28b})$$

$$F_T(x_T) \leq (1 + \eta) F_T(x_T^*) + \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \|x_T - x_T^*\|^2. \quad (\text{B.28c})$$

因此, 对任意  $\eta > 0$ ,  $\text{MPC}_k$  控制器的总代价有上界

$$\begin{aligned} & \text{cost}(\text{MPC}_k) \\ & = \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t) + f_t^u(u_t)) + F_T(x_T) \\ & \leq (1 + \eta) \left( \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t^*) + f_t^u(u_t^*)) + F_T(x_T^*) \right) \\ & \quad + \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \left( \sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \right) \\ & \leq (1 + \eta) \left( \sum_{t=0}^{T-1} (f_t^x(x_t^*) + f_t^u(u_t^*)) + F_T(x_T^*) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29a})$$



$$\begin{aligned}
& + \ell \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \left( \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|x_t - x_t^*\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \|u_t - u_t^*\|^2 \right) \\
\leq & \left( 1 + \eta + \frac{H_3^2 \ell}{\mu} \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1 - \lambda_3} \right) \cdot \lambda_3^{2k} \right) \cdot \text{cost}(\text{OPT}) \\
& + H_3^2 \ell \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1 - \lambda_3} \right) \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau)
\end{aligned} \tag{B.29b}$$

$$\leq \left( 1 + \eta + \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \left( E_1 \cdot \lambda_3^{2k} + E_2 \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau \right) \right) \cdot \text{cost}(\text{OPT}), \tag{B.29c}$$

其中, (B.29a) 用到 (B.28), (B.29b) 是 (B.27) 对  $t$  求和的结果, 而 (B.29c) 中用到假设  $P_\tau \leq \pi_\tau \cdot \text{cost}(\text{OPT})$ , 且常数  $E_1$ 、 $E_2$  由下式给出

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{H_3^2 \ell}{\mu} \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1 - \lambda_3} \right), \\
E_2 &= H_3^2 \ell \left( 1 + \frac{2H_3 L_g^2}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + \frac{H_3}{1 - \lambda_3} \right) \left( 1 + H_3 + \frac{L_w^2}{1 - \lambda_3} \right).
\end{aligned}$$

取  $\eta := \left( E_1 \cdot \lambda_3^{2k} + E_2 \cdot \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau \right)^{\frac{1}{2}}$ , 并利用  $\text{cost}(\text{OPT}) = O(T)$ , 即可移项得

$$\begin{aligned}
\text{cost}(\text{MPC}_k) - \text{cost}(\text{OPT}) &= O \left( \sqrt{\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau P(\tau) + \lambda_3^{2k} \cdot T} \right), \\
\frac{\text{cost}(\text{MPC}_k)}{\text{cost}(\text{OPT})} &\leq 1 + O \left( \sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau + \lambda_3^{2k} + \sqrt{\sum_{\tau=0}^{k-1} \lambda_3^\tau \pi_\tau + \lambda_3^{2k}} \right).
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 ■

## B.5 5.2 节的证明

本节中, 我们将再次应用附录 B.1.3 中提出的分析思路, 直接将最优控制问题视为带等式约束的凸优化问题进行微扰分析。注意到假设 5.2 中用到终端代价函数为指示函数的有限时间最优控制问题, 这破坏了问题的光滑性, 但只要将其等价地视为额外的末态约束, 即可得到形式相仿的 (具有双端条件的) 优化问题,



我们指出：Hessian 矩阵  $H_{t_1}^{t_2}$ 、 $\hat{H}_{t_1}^{t_2}$  的最小奇异值与系统在  $[t_1, t_2 + 1]$  区间上最优解的存在性与稳定性均有密切的联系。

- 任意给定初态  $x_{t_1}$  和噪声  $w = (w_{t_1}, w_{t_1+1}, \dots, w_{t_2})$ ，优化问题总有唯一最优解  $\alpha = (x_{t_1}, u_{t_1}, x_{t_1+1}, \dots, u_{t_2}, x_{t_2+1})$  满足  $H_{t_1}^{t_2} \alpha = w$ （由于  $H_{t_1}^{t_2}$  总是行满秩的）；从而，若  $H_{t_1}^{t_2}$  的最小奇异值有下界  $\sigma > 0$ ，则对任意的  $x_{t_1}$  和  $w$ ，最优解  $\alpha$  都满足  $\|\alpha\| \leq \frac{1}{\sigma} \|w\|$ （ $\sigma > 0$  为常数）。
- 类似的，任意给定初态  $x_{t_1}$  和噪声  $\hat{w} = (w_{t_1}, \dots, w_{t_2-1}, w_{t_2} - x_{t_2+1})$ ，优化问题的最优解  $\hat{\alpha} = (x_{t_1}, u_{t_1}, x_{t_1+1}, \dots, u_{t_2}, x_{t_2+1})$  总满足  $\hat{H}_{t_1}^{t_2} \hat{\alpha} = \hat{w}$ （注意： $\hat{H}_{t_1}^{t_2}$  不总是行满秩的，因此可行解不一定存在）；从而，若  $\hat{H}_{t_1}^{t_2}$  的最小奇异值有下界  $\sigma > 0$ ，则对任意的  $x_{t_1}$  和  $\hat{w}$ ，最优解  $\hat{\alpha}$  都满足  $\|\hat{\alpha}\| \leq \frac{1}{\sigma} \|\hat{w}\|$ 。

那么，Hessian 矩阵的最小奇异值是否确有以下界呢？答案是肯定的。事实上，[57] 已经证明：系统的一致可控性可以推出 Hessian 矩阵最小奇异值的下界。我们将这一结果叙述为引理 B.15，它保证我们可以应用 KKT 矩阵的微扰响应上界。

引理 B.15. 在假设 5.2 下，存在常数  $\underline{\sigma}_H > 0$ ，使得

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} \left( H_t^{T-1}(\xi_{t:T-1}) \right) &\geq \underline{\sigma}_H, \quad \forall t < T; \\ \sigma_{\min} \left( \hat{H}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k}) \right) &\geq \underline{\sigma}_H, \quad \forall t < T - k. \end{aligned}$$

证明. 参见 [57] 的引理 12. ■

现在，我们可以利用引理 B.4 给出系统的微扰响应上界。为此，首先需要像之前所做的那样，将原始-对偶解按时间重排，从而使  $H$ 、 $\hat{H}$  重排为  $Y$ 、 $\hat{Y}$ ：

- 设  $\Phi_t^T$  是将  $\chi_t^T$  重排为  $\tilde{\chi}_t^T := (y_t, v_t, \eta_t, y_{t+1}, v_{t+1}, \eta_{t+1}, \dots, y_T, \eta_T)$  的置换矩阵（即  $\tilde{\chi}_t^T = \Phi_t^T \chi_t^T$ ），并设  $H_t^T$  被相应地重排为  $Y_t^T := (\Phi_t^T) H_t^T (\Phi_t^T)^\top$ 、 $b_t^T$  被重排为  $\beta_t^T := (\Phi_t^T) b_t^T$ 。重排后的原始-对偶最优解满足  $\tilde{\chi}_t^T = (Y_t^T)^{-1} \beta_t^T$ 。
- 设  $\hat{\Phi}_t^{t+k}$  是将  $\hat{\chi}_t^{t+k}$  重排为  $\tilde{\chi}_t^{t+k} := (y_t, v_t, \eta_t, \dots, y_{t+k-1}, v_{t+k-1}, \eta_{t+k-1}, \eta_{t+k})$  的置换矩阵（即  $\tilde{\chi}_t^{t+k} = \hat{\Phi}_t^{t+k} \hat{\chi}_t^{t+k}$ ），并设  $\hat{H}_t^{t+k}$  被相应地重排为  $\hat{Y}_t^{t+k} := (\hat{\Phi}_t^{t+k}) \hat{H}_t^{t+k} (\hat{\Phi}_t^{t+k})^\top$ 、 $\hat{b}_t^{t+k}$  被重排为  $\hat{\beta}_t^{t+k} := (\hat{\Phi}_t^{t+k}) \hat{b}_t^{t+k}$ 。重排后的原始-对偶最优解满足  $\tilde{\chi}_t^{t+k} = (\hat{Y}_t^{t+k})^{-1} \hat{\beta}_t^{t+k}$ 。

有必要指出：重排后的  $Y_t^T(\xi_{t:T})$  是大小为  $(T-t+1) \times (T-t+1)$  的分块矩阵，约定其索引为  $(i, j) \in [t, T] \times [t, T]$ ； $\hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k})$  是大小为  $(k+1) \times (k+1)$  的分块矩阵，约定其索引为  $(i, j) \in [t, t+k] \times [t, t+k]$ 。利用上述记号，可以将系统不确定性参数  $\xi$  的扰动拆分为对 KKT 矩阵  $Y$  的扰动和对常数项  $\beta$  的扰动两部分，两者的微扰响应上界之和即为系统的微扰响应上界。

定理 B.16. 在假设 5.2 下, 性质 3.2 对任意常数  $R > 0$  及

$$q_1(t) = H_4 \lambda_4^{2t}, \quad q_2(t) = H_4 \lambda_4^t, \quad q_3(t) = H_4 \lambda_4^t$$

成立, 其中  $\lambda_4 := \lambda_K$ , 而  $H_4$  由下式给出 ( $\lambda_K$ 、 $C_K$  在引理 B.4 中定义)

$$H_4 := C'_K \left( \frac{2(\ell D_{\bar{x}} + D_w)}{1 - \lambda_K} + R + D_{x^*} + 1 \right) + C_K (L_w + \ell L_{\bar{x}} + D_{\bar{x}} L_Q + 1).$$

证明. 首先证明 (3.1). 对  $t < T - k$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \Psi_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}; \mathbb{I})_{v_t} - \Psi_t^{t+k}(z, \xi'_{t:t+k}; \mathbb{I})_{v_t} \right\| \\ & \leq \left\| \left( \hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k})^{-1} \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}) - \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1} \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi'_{t:t+k}) \right)_{v_t} \right\| \end{aligned} \quad (\text{B.32a})$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\| \left( (\hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k})^{-1} - \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1}) \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}) \right)_{v_t} \right\| \\ & \quad + \left\| \left( \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1} (\hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}) - \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi'_{t:t+k})) \right)_{v_t} \right\|, \end{aligned} \quad (\text{B.32b})$$

其中 (B.32a) 用到 KKT 条件, 而 (B.32b) 用到三角不等式. 注意到 (B.32) 将微扰响应拆分为两部分, 只需分别求出二者的上界, 即得系统的微扰响应上界.

对于 (B.32) 右边的第一项, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \left( (\hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k})^{-1} - \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1}) \cdot \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}) \right)_{v_t} \right\| \\ & \leq \sum_{\tau=t}^{t+k} \left\| (\hat{Y}_t^{t+k}(\xi_{t:t+k})^{-1} - \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1})_{t,\tau} \right\| \cdot \left\| \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k})_{\tau} \right\| \end{aligned} \quad (\text{B.33a})$$

$$\begin{aligned} & \leq C'_K \left( \sum_{\tau=0}^k \lambda_K^{2\tau} \|\xi_{t+\tau} - \xi'_{t+\tau}\| \right) \cdot \|z\| + \sum_{\tau=t}^{t+k} C'_K \left( \sum_{i=t}^{t+k} \lambda_K^{i-t+|i-\tau|} \|\xi_i - \xi'_i\| \right) \cdot (\ell D_{\bar{x}} + D_w) \\ & \quad + C'_K \lambda_K^k \cdot \left( \sum_{\tau=0}^k \|\xi_{t+\tau} - \xi'_{t+\tau}\| \right) \cdot \|\xi_{t+k}\| \end{aligned} \quad (\text{B.33b})$$

$$\leq C'_K \sum_{\tau=0}^k \lambda_K^{2\tau} \delta_{t+\tau} \cdot \|z\| + C'_K \left( \frac{2(\ell D_{\bar{x}} + D_w)}{1 - \lambda_K} + R + D_{x^*} \right) \sum_{\tau=0}^k \lambda_K^{\tau} \delta_{t+\tau}, \quad (\text{B.33c})$$

其中 (B.33a) 用到三角不等式, (B.33b) 中各项  $\hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k})$  的放缩用到引理 B.4, 而 (B.33c) 是利用  $\xi_{t+k} \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  并重新整理得到的.

对于 (B.32) 右边的第二项, 有 (令  $\delta_{\tau} := \|\xi_{\tau} - \xi'_{\tau}\|$ )

$$\left\| \left( \hat{Y}_t^{t+k}(\xi'_{t:t+k})^{-1} (\hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}) - \hat{\beta}_t^{t+k}(z, \xi'_{t:t+k})) \right)_{v_t} \right\|$$

$$\leq C_K \sum_{\tau=t}^{t+k} \lambda_K^{\tau-t} (L_w + \ell L_{\bar{x}} + D_{\bar{x}} L_Q) \delta_{\tau} + C_K \lambda_K^k \delta_{t+k}, \quad (\text{B.34})$$

其中用到不等式

$$\begin{aligned} & \left\| Q_{\tau}(\xi_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) - Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi'_{\tau}) \right\| \\ & \leq \left\| Q_{\tau}(\xi_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) - Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) \right\| + \left\| Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) - Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \bar{x}_{\tau}(\xi'_{\tau}) \right\| \\ & \leq \left\| Q_{\tau}(\xi_{\tau}) - Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \right\| \cdot \left\| \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) \right\| + \left\| Q_{\tau}(\xi'_{\tau}) \right\| \cdot \left\| \bar{x}_{\tau}(\xi_{\tau}) - \bar{x}_{\tau}(\xi'_{\tau}) \right\| \\ & \leq (L_Q D_{\bar{x}} + \ell L_{\bar{x}}) \delta_{\tau}. \end{aligned}$$

将 (B.33) 和 (B.34) 代入 (B.32), 即可证明: 对任意  $t < T - k$ ,  $\xi_{t:t+k-1} \in \Xi_{t:t+k-1}$ ,  $\xi'_{t:t+k-1} = \xi_{t:t+k-1}^*$  和  $\xi_{t+k}, \xi'_{t+k} \in \mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$ , 都有

$$\left\| \psi_t^{t+k}(z, \xi_{t:t+k}; \mathbb{I})_{v_t} - \psi_t^{t+k}(z, \xi'_{t:t+k}; \mathbb{I})_{v_t} \right\| \leq \left( \sum_{\tau=0}^k q_1(\tau) \delta_{t+\tau} \right) \|z\| + \sum_{\tau=0}^k q_2(\tau) \delta_{t+\tau}.$$

类似地, 还可证明: 对任意  $t \geq T - k$ ,  $\xi_{t:T} \in \Xi_{t:T}$  和  $\xi'_{t:T} = \xi_{t:T}^*$ , 都有

$$\left\| \psi_t^T(z, \xi_{t:T}; F_T)_{v_t} - \psi_t^T(z, \xi'_{t:T}; F_T)_{v_t} \right\| \leq \left( \sum_{\tau=0}^{T-t} q_1(\tau) \delta_{t+\tau} \right) \|z\| + \sum_{\tau=0}^{T-t} q_2(\tau) \delta_{t+\tau}.$$

这就完成了微扰响应上界 (3.1) 的证明。

最后, 我们证明 (3.2)。事实上, 对任意  $t < T$ , 恒有

$$\begin{aligned} & \left\| \psi_t^T(z, \xi_{t:T}^*; F_T)_{y_t/v_t} - \psi_t^T(z', \xi_{t:T}^*; F_T)_{y_t/v_t} \right\| \\ & \leq \left\| \left( Y_t^T(\xi_{t:T}^*)^{-1} (\beta_t^T(z, \xi_{t:T}^*) - \beta_t^T(z', \xi_{t:T}^*)) \right)_{y_t/v_t} \right\| \end{aligned} \quad (\text{B.35a})$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\| (Y_t^T(\xi_{t:T}^*)^{-1})_{\tau,t} \right\| \cdot \|z - z'\| \\ & \leq C_K \lambda_K^{\tau-t} \|z - z'\|, \end{aligned} \quad (\text{B.35b})$$

其中 (B.35a) 用到 KKT 条件, 而 (B.35b) 用到引理 B.4。这就完成了证明。 ■

最后, 只需要应用微扰分析基本定理, 就能得到定理 5.3 的证明。

**定理 5.3 的证明。** 容易验证: 假设 5.2 保证性质 3.1 成立; 而定理 B.16 则保证性质 3.2 对任意常数  $R > 0$  及

$$q_1(t) = H_4 \lambda_4^{2t}, \quad q_2(t) = H_4 \lambda_4^t, \quad q_3(t) = H_4 \lambda_4^t$$

成立, 其中衰减因子  $\lambda_4 \in (0, 1)$  和常数  $H_4$  都依赖于  $R$ 。若取  $R := D_{x^*} + D_{\bar{x}}$ , 则带有终端代价函数  $\mathbb{I}(\cdot; \bar{x}_{t+k}(\xi_{t+k|t}))$  的  $\text{MPC}_k$  控制器满足定理 3.3 的假设, 此时常

系数（如定理 B.16 中那样）取为

$$H_4 = C'_K \left( \frac{2(\ell D_{\bar{x}} + D_w)}{1 - \lambda_4} + 2D_{x^*} + D_{\bar{x}} + 1 \right) + C_K (L_w + \ell L_{\bar{x}} + D_{\bar{x}} L_Q + 1)。$$

至此，为应用定理 3.3 证明定理 5.3，仅需使预测误差  $\rho_{t,\tau}$  满足

$$\sum_{\tau=0}^k \lambda_4^\tau \rho_{t,\tau} \leq \frac{(1 - \lambda_4)^2 (D_{x^*} + D_{\bar{x}})}{2H_4^2 L_g ((1 - \lambda_K)(D_{x^*} + D_{\bar{x}}) + H_4(D_{x^*} + 1))}，$$

并使预测视野  $k$  满足

$$\lambda_4^k \leq \frac{(1 - \lambda_4)^2}{4H_4^2 L_g ((1 - \lambda_4)(D_{x^*} + D_{\bar{x}}) + H_4(D_{x^*} + 1))}。$$

这就完成了证明。 ■

## B.6 6.1 节的证明

本节的结果基于一个已知的微扰响应上界（参见 [51] 中的命题 4）。<sup>①</sup> 正如 2.2 节的讨论那样，对于含不等式约束的最优控制问题而言，识别最优控制轨迹上（及其邻域内）哪些约束是活跃约束，对于在局部刻画最优解是有益的（基于此，我们在描述 (6.1) 时，在约束矩阵和约束向量的记号上附加了波浪号，就是为了强调所列的约束不一定是活跃约束）。据此，我们可以作出以下定义。

**定义 B.1 (活跃约束矩阵).** 在  $t$  时刻，取得等号的不等式约束称为该时刻的活跃约束 (*active constraint*)，活跃约束的指标全体构成活跃约束的指标集 (*index set*)  $I_t \subseteq \{1, \dots, r_t\}$ 。进而， $t$  时刻的活跃约束矩阵定义为

$$\Gamma_{t,I_t}^x := \tilde{\Gamma}_t^x(I_t, :), \quad \Gamma_{t,I_t}^u := \tilde{\Gamma}_t^u(I_t, :), \quad \gamma_t := \tilde{\gamma}_t(I_t)。$$

我们额外定义  $\hat{\Gamma}_{t,I_t}^u := \left( \Gamma_{t,I_t}^u R_t^{-1} (\Gamma_{t,I_t}^u)^\top \right)^{-1}$ （特别地，若  $I_t = \emptyset$ ，约定  $\hat{\Gamma}_{t,I_t}^u = \mathbf{0}$ ）。

活跃约束矩阵需要满足的条件已经列于假设 6.1 中。在该假设下，可以直接应用 [51] 中的命题 4，得到系统的微扰响应上界。

**定理 B.17.** 在假设 6.1 下， $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})$  满足微扰响应上界

$$\left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z', \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \leq C_1 \lambda^{h-t_1} \|z - z'\|，$$

<sup>①</sup> 为了使本文中的记号保持一致，我们修改了部分记号的字母。具体而言，代价矩阵的上、下界统一为  $\ell$ 、 $\mu$ （即原文中  $\tilde{C}_Q = C_R =: \ell$ 、 $\lambda_Q = \lambda_R =: \mu$ ），动力学矩阵的范数上界分别改为  $a := \tilde{C}_A a$ 、 $b := \tilde{C}_B$ ，约束矩阵的范数上界分别为  $\gamma_x := C_E$ 、 $\gamma_u := C_H$ 、 $\hat{\gamma}_u := C_{\hat{H}}$ ，一致可控性常数为  $\sigma := \sqrt{\lambda_C}$ ，可控性指数为  $d := t$ ；衰减因子用  $\lambda$  表示（原文为  $\rho$ ），常系数用  $C_1$ 、 $C_2$  表示（原文为  $Z_1$ 、 $Z_2$ ）。感兴趣的读者对照原文时请注意甄别记号上的差异。

$$\left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2}; \mathbb{I})_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi'_{t_2}; \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right\| \leq \bar{C}_2 \bar{\lambda}^{t_2-h} \|\xi_{t_2} - \xi'_{t_2}\|。$$

这里衰减因子  $\lambda$ 、 $\bar{\lambda}$  及常数  $C_1$ 、 $C_2$  由下式决定

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{\beta}}}, \quad C_1 = \max\{1, Y_1\} \sqrt{\beta/\mu};$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_{\beta\mu}}{\ell}}}, \quad \bar{C}_2 = \max \left\{ \frac{\bar{C}}{1 - \bar{\lambda}^2}, \frac{\bar{Y}_1 \bar{C}}{1 - \bar{\lambda}^2} + \frac{\bar{Y}_s}{\bar{\lambda}} \right\}。$$

其中各常数可嵌套定义如下（回忆  $d$  是系统的可控性指数）<sup>①</sup>

$$C_A = a + \frac{b\gamma_x \gamma_u \hat{\gamma}_u}{\mu}, \quad C_B = b + \frac{b\gamma_u^2 \hat{\gamma}_u}{\mu}, \quad C_Q = \ell + \gamma_x^2 \hat{\gamma}_u, \quad M = \frac{C_B(1 - C_A^d)}{1 - C_A},$$

$$\beta = C_Q \left( 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left( C_A^i + \frac{M^2}{\sigma^2} C_A^d \right)^2 \right) + \frac{\ell M^2}{\sigma^4} C_A^{2d},$$

$$C_X = \frac{\mu + \gamma_u^2 \hat{\gamma}_u}{\mu^2}, \quad C_M = \frac{\mu + C_B^2 \beta}{\mu}, \quad Y_1 = \frac{\gamma_x \gamma_u \hat{\gamma}_u}{\mu} + C_X b \beta C_A C_M,$$

$$\bar{M} = \frac{b(1 - a^d)}{1 - a}, \quad C_{\beta} = \frac{\sigma^4}{\bar{M}^2 a^{2d}}, \quad \bar{C}_M = 1 + \frac{b^2 \ell}{C_{\beta} \mu}, \quad \bar{Y}_1 = \frac{ab \bar{C}_M}{C_{\beta} \mu},$$

$$\bar{C} = \bar{C}_1 \bar{C}_M b \sqrt{\frac{C_{\beta} \ell}{\mu}}, \quad \bar{Y}_s = b \sqrt{\frac{C_{\beta} \ell}{\mu}} \left( 1 + \frac{b^2 \bar{C}_M \ell}{C_{\beta} \mu} \right)。$$

证明。为方便起见，补充定义以下常数：

$$C_s = \ell \sqrt{\beta/\mu}, \quad C = C_1 C_M b C_X C_s, \quad Y_2 = C_X b(1 + \beta C_M b^2 C_X), \quad Y_s = Y_2 C_s,$$

$$C_2 = \max \left\{ \frac{C}{1 - \lambda^2}, \frac{Y_1 C}{1 - \lambda^2} + \frac{Y_s}{\lambda} \right\}。$$

注意到 [51] 中的命题 4 给出

$$\left\| \nabla_z \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \leq C_1 \lambda^{t-t_1}, \quad (\text{B.36})$$

$$\left\| \nabla_{\xi_{t_2}} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; \kappa F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \leq C_2 \lambda^{t_2-t}。 \quad (\text{B.37})$$

这里，我们在 (B.37) 中的终端代价函数前添加了任意常数倍  $\kappa$ ，因此需要证明微分形式的微扰响应上界仍成立。注意到  $\kappa$  将使  $\ell$ 、 $\mu$  分别扩大至原来的  $\kappa$  倍，故只需要证明  $C_2$ 、 $\lambda$  在  $\kappa \rightarrow +\infty$  时均收敛至与  $\kappa$  无关的常数（即  $\bar{C}_2$ 、 $\bar{\lambda}$ ）。事实上，

① 为方便读者查阅，这些常数的记号与 [51] 中保持一致，读者可自行参照原文的假设 1、引理 1、命题 3、命题 4 以及附录 A.1 等。一切带上划线的常数都是相应常数在  $\ell, \mu \rightarrow \infty$  且比值  $\ell/\mu$  保持不变时的极限值。

在  $\kappa \rightarrow +\infty$  时,  $C_A$ 、 $C_B$ 、 $M$  分别收敛至  $a$ 、 $b$ 、 $\bar{M}$ , 因此

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\kappa\mu}{\beta} = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\kappa\mu}{\frac{M^2 C_A^{2d}}{\sigma^4} \kappa\ell + \text{收敛至常数的项}} = C_\beta \cdot \frac{\mu}{\ell}.$$

进而, 容易验证  $\lambda$ 、 $C_M$ 、 $Y_1$  分别收敛至  $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{C}_M$ 、 $\bar{Y}_1$ , 其中

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} Y_1 = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \left( \frac{\text{常数}}{\kappa\mu} + ab\bar{C}_M \cdot \frac{\beta}{\kappa\mu} \right) = \bar{Y}_1.$$

进而,  $C$ 、 $Y_s$  分别收敛至

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} C &= \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \bar{C}_1 \bar{C}_M b \frac{\kappa\ell}{\kappa\mu} \sqrt{\frac{\beta}{\kappa\mu}} = \bar{C}, \\ \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} Y_s &= \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{b}{\kappa\mu} \left( 1 + b^2 \bar{C}_M \cdot \frac{\beta}{\kappa\mu} \right) \cdot \kappa\ell \sqrt{\frac{\beta}{\kappa\mu}} = \bar{Y}_s. \end{aligned}$$

因此,  $C_2$  在  $\kappa \rightarrow +\infty$  时收敛至  $\bar{C}_2$ , 这就证明了 (B.37) 对任意倍数  $\kappa > 0$  成立。特别地, 取  $\kappa \rightarrow +\infty$  的极限, 即得

$$\left\| \nabla_{\xi_{t_2}} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right\| \leq \bar{C}_2 \bar{\lambda}^{t-t_1}. \quad (\text{B.38})$$

最后, 只需要在被扰动变量的连线上积分, 就可以得到有限大小微扰的响应上界。具体而言, 由 (B.36) 可得

$$\begin{aligned} & \left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}^*; F_{t_2})_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z', \xi_{t_1:t_2}^*; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \left( \frac{d}{d\theta} \psi_{t_1}^{t_2}(z + \theta(z' - z), \xi_{t_1:t_2}^*; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right) d\theta \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \left( \nabla_z \psi_{t_1}^{t_2}(z + \theta(z' - z), \xi_{t_1:t_2}^*; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right)^\top (z' - z) d\theta \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \nabla_z \psi_{t_1}^{t_2}(z + \theta(z' - z), \xi_{t_1:t_2}^*; F_{t_2})_{y_t/v_t} \right\| \|z - z'\| d\theta \\ &\leq C_1 \lambda^{t-t_1} \|z - z'\|; \end{aligned}$$

而由 (B.38) 可得

$$\begin{aligned} & \left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2}; \mathbb{I})_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi'_{t_2}; \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \left( \frac{d}{d\theta} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2} + \theta(\xi'_{t_2} - \xi_{t_2}); \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right) d\theta \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \left( \nabla_{\xi_{t_2}} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2} + \theta(\xi'_{t_2} - \xi_{t_2}); \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right)^\top (\xi'_{t_2} - \xi_{t_2}) d\theta \right\| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 \left\| \nabla_{\xi_{t_2}} \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2-1}, \xi_{t_2} + \theta(\xi'_{t_2} - \xi_{t_2}); \mathbb{I})_{y_t/v_t} \right\| \|\xi_{t_2} - \xi'_{t_2}\| d\theta \\ &\leq \bar{C}_2 \bar{\lambda}^{t_2-t} \|\xi_{t_2} - \xi'_{t_2}\|. \end{aligned}$$

这就完成了证明。 ■

得到微扰响应上界后，就可以如之前所做的那样直接得到定理 6.1 的证明。

**定理 6.1 的证明。** 容易验证：假设 6.1 保证性质 3.1 成立；定理 B.17 则保证性质 3.2 对任意半径  $R < R_0$  及函数  $q_1(t) = 0$ 、 $q_2(t) = \bar{H}_5 \bar{\lambda}_5^t$ 、 $q_3(t) = H_5 \lambda_5^t$  成立，其中  $H_5 := C_1$ 、 $\lambda_5 := \lambda$ 、 $\bar{H}_5 := \bar{C}_2$ 、 $\bar{\lambda}_5 := \bar{\lambda}$  的定义见定理 B.17。

现在，仅需要取半径  $R$  为恰当的值。例如，取  $R := \max \left\{ R_0, D_{x^*}, \frac{L_g \bar{H}_5^3}{(1-\bar{\lambda}_5)^3} \right\}$ ，则 MPC<sub>k</sub> 求解的每一个有限时间最优控制问题中，终端状态 0 都将在邻域  $\mathbb{B}(x_{t+k}^*, R)$  中，并且定理 3.3 所需的条件在

$$k \geq \ln \left( \frac{2\bar{H}_5^3 L_g}{(1-\bar{\lambda}_5)^2} \right) / \ln(1/\bar{\lambda}_5)$$

时成立（注意到  $\rho_{t,\tau} \leq 1$ ）。因此，直接应用定理 3.3 即完成了证明。 ■

## B.7 6.2 节的证明

本节的结果同样基于文献中已知的微扰响应上界（参见 [53] 中的定理 4.5）。为了叙述这一上界，我们首先定义一些必须的概念和记号。将一般形式的有限时间最优控制问题视为一个约束优化问题，其约束包含各时刻等式约束的全体  $I_e$ （即动力学方程表示的约束）和不等式约束的全体  $I_i$ （即约束函数表示的约束）。设  $y = (\alpha, \eta)$  表示有限时间最优控制问题的原始-对偶解，而  $p = (z, \xi)$  表示其参量，可定义依赖于 Lagrangian 量  $\mathcal{L}(y; p)$  的矩阵

$$K(y; p) := \nabla_{yy}^2 \mathcal{L}(y; p), \quad R(y; p) := \nabla_{yp}^2 \mathcal{L}(y; p).$$

类似于定义 B.1，可以定义活跃约束的指标集（注意这里不再区分时刻）：

$$I_0(p) := I_e \cup \{i \in I_i \mid \text{约束 } i \text{ 是活跃约束, 且对偶变量不为 } 0\},$$

$$I_1(p) := I_e \cup \{i \in I_i \mid \text{约束 } i \text{ 是活跃约束}\}.$$

这里约定：所有矩阵均在这样一组有序基下表示，其中原始-对偶向量的排列顺序为  $(\alpha_{t_1}, \eta_{t_1}, \alpha_{t_1+1}, \eta_{t_1+1}, \dots, y_{t_2}, \eta_{t_2})$ ，并且各矩阵均视为按时刻  $t$  划分的分块矩阵。

下面，我们补充定义假设 6.2 中用到的奇异值有界特征组的概念。

定义 B.2 (奇异值有界特征组). 在有限时间最优控制问题  $\psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F)$  中, 称正实数对  $(\bar{\sigma}_K, \bar{\sigma}_R, \underline{\sigma}_K)$  为关于参量  $p$  的奇异值有界特征组, 若它们满足

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_K &\geq \max \{ \sigma_{\max}(K(y; p)(I, I)) \mid I_0(p^*) \subseteq I \subseteq I_1(p^*) \}, \\ \bar{\sigma}_R &\geq \max \{ \sigma_{\max}(R(y; p)(I, :)) \mid I_0(p^*) \subseteq I \subseteq I_1(p^*) \}, \\ 0 < \underline{\sigma}_K &\leq \max \{ \sigma_{\min}(K(y; p)(I, I)) \mid I_0(p^*) \subseteq I \subseteq I_1(p^*) \}.\end{aligned}$$

现在, 我们可以将 [53] 中证明的微扰响应上界重新表述如下。

引理 B.18. 在假设 6.2 下, 存在  $p^*$  的一个  $\varepsilon$ -邻域  $\mathbb{B}(p^*, \varepsilon)$ , 使得对邻域内问题的任意参量  $p, p' \in \mathbb{B}(p^*, \varepsilon)$ , 都有

$$\begin{aligned}\left\| \psi_{t_1}^{t_2}(z, \xi_{t_1:t_2}; F)_{y_t/v_t} - \psi_{t_1}^{t_2}(z', \xi'_{t_1:t_2}; F)_{y_t/v_t} \right\| \leq \\ C \left( \lambda^{t-t_1} \|z - z'\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \lambda^{|t-\tau|} \|\xi_\tau - \xi'_\tau\| \right).\end{aligned}$$

其中常系数  $C > 0$  和衰减因子  $\lambda \in (0, 1)$  由下式决定:

$$C := \left( \frac{\bar{\sigma}_K \bar{\sigma}_R}{\underline{\sigma}_K^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda := \left( \frac{\bar{\sigma}_K^2 - \underline{\sigma}_K^2}{\bar{\sigma}_K^2 + \underline{\sigma}_K^2} \right)^{\frac{1}{8}},$$

这里  $(\bar{\sigma}_K, \bar{\sigma}_R, \underline{\sigma}_K)$  为关于诸参量  $p \in \mathbb{B}(p^*, \varepsilon)$  的奇异值有界特征组。

证明. 参见 [53] 中定理 4.5 的证明。 ■

最后, 我们仍然如之前所做的那样, 得到定理 6.2 的证明。

定理 6.2 的证明. 容易验证: 假设 6.2 保证性质 3.1 成立; 引理 B.18 则保证性质 3.2 对某一半径  $R$  及函数  $q_1(t) = 0$ 、 $q_2(t) = H_6 \lambda_6^t$ 、 $q_3(t) = H_6 \lambda_6^t$  成立, 其中  $C_6 := C$ 、 $\lambda_6 := \lambda$  的定义见引理 B.18。这时, 代入微扰分析基本定理, 即可得到定理 6.2 的结论。这就完成了证明。 ■

我们指出: 定理 6.2 就其系统模型而言是最一般的, 但就其结果的强度而言却是最弱的 (当然, 这并不令人诧异)。事实上, 定理中的邻域半径  $R$  和  $\varepsilon$  都没有显式表达式, 因此终端代价函数的参考点  $\bar{y}(\xi_{t+k|t})$  在实际系统中是难以确定的。不过, 在某些特殊的假设下也可以巧妙地取定符合假设的  $\bar{y}(\xi_{t+k|t})$ 。例如, 若保证不确定性参数的真值有上界  $\|\xi_t^*\| \leq \frac{(1-\lambda_6)R}{H_6}$ , 则容易看到

$$\left\| \psi_0^T(x_0, \mathbf{0}; F_T)_{y_{t+k}} - x_{t+k}^* \right\| \leq R.$$

因此, 将  $\psi_0^T(x_0, \mathbf{0}; F_T)_{y_{t+k}}$  的指示函数作为输入  $\text{MPC}_k$  的终端代价函数  $F_{t+k}$ , 可以满足定理 6.2 的假设。如此即得到一般系统中保证  $\text{MPC}_k$  控制器的超额代价

有上界的一种可能实现方式。

## B.8 非指数衰减的微扰响应上界

在 3.1 节中，我们曾指出微扰响应上界并不一定具有指数衰减的形式，但在此前讨论的全部系统实例中都没有出现这样的情况。事实上，上述各系统的微扰响应上界都依赖对系统性质的假设，而正是这些假设保证了指数衰减的微扰响应上界存在。根据文献和经验，指数衰减的微扰响应上界是最普遍的。

那么，是否存在一些特殊的系统，其中不成立指数衰减的微扰响应上界呢？答案是肯定的。本节将给出一个简单的系统实例，其微扰响应不是指数衰减的。构造的基本思路是恰当地配置代价函数的最小值点和约束条件，使得控制器只能被动地“追赶”最小值点却不能充分接近之，从而最大程度地限制其行为。

**例 B.1 (非指数衰减的微扰响应上界).** 考虑最优控制问题 (2.1) 的实例

$$\begin{aligned} & \underset{x_0:T, u_0:T-1}{\text{minimize}} && \sum_{t=0}^T \|x_t - \bar{x}_t\|^2 \\ & \text{subject to} && x_{t+1} = x_t + u_t, \quad \forall 0 \leq t < T, \\ & && -1 \leq x_t \leq 1, \quad -1 \leq u_t \leq 1, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \\ & && x_0 = x_{\text{init}}. \end{aligned} \tag{B.39}$$

其中，系统参量的预测都是准确的，代价函数的参考点  $\bar{x}_t$  如下选取：

$$\bar{x}_t = \begin{cases} 1 & t \text{ 是奇数} \\ -1 & t \text{ 是偶数} \end{cases}, \quad \forall t \in [1, T-1].$$

当  $T$  为偶数时，考虑该系统中终端代价函数为指示函数的有限时间最优控制问题  $\psi_0^T(0, \xi_{0:T-1}^*, \zeta_T; \mathbb{I})$  (即问题有双端状态约束  $0, \zeta_T$ )。如果取末态  $\zeta_T = -\frac{1}{2} + \varepsilon$  (其中  $\varepsilon < \frac{1}{2(T-1)}$ )，不难验证最优控制轨迹将做振幅为 1 的上下振动，即

$$\psi_0^T\left(0, \xi_{0:T-1}^*, -\frac{1}{2} + \varepsilon; \mathbb{I}\right)_{y_t} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon & t \text{ 是奇数} \\ -\frac{1}{2} + \varepsilon & t \text{ 是偶数} \end{cases},$$

类似地，当  $T$  为奇数时，如果取末态  $\zeta_T = \frac{1}{2} + \varepsilon$  (其中  $\varepsilon < \frac{1}{2T}$ )，最优控制轨迹同

样将做振幅为 1 的上下振动，即

$$\psi_0^T \left( 0, \xi_{0:T-1}^*, \frac{1}{2} + \varepsilon; \mathbb{I} \right)_{y_t} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon & t \text{ 是奇数} \\ -\frac{1}{2} + \varepsilon & t \text{ 是偶数} \end{cases}。$$

由此可以得到  $T$  为偶数时的微扰响应上界

$$\left\| \psi_0^T \left( 0, \xi_{0:T-1}^*, -\frac{1}{2}; \mathbb{I} \right)_{y_t} - \psi_0^T \left( 0, \xi_{0:T-1}^*, -\frac{1}{2} + \varepsilon; \mathbb{I} \right)_{y_t} \right\| = \varepsilon,$$

以及  $T$  为奇数时的微扰响应上界

$$\left\| \psi_0^T \left( 0, \xi_{0:T-1}^*, \frac{1}{2}; \mathbb{I} \right)_{y_t} - \psi_0^T \left( 0, \xi_{0:T-1}^*, \frac{1}{2} + \varepsilon; \mathbb{I} \right)_{y_t} \right\| = \varepsilon,$$

它们均不随扰动时刻  $T$  与观察时刻  $t$  的间隔  $T - t$  而衰减。 ■

使用相同的思路，还可以构造这样的实例，其中任意在线控制器的性能竞争比都将有下界  $1 + \Omega(\frac{1}{k^2})$  ( $k$  是控制器的预测视野)，这里限于篇幅原因不再赘述。以上反例从不同的侧面反映了微扰响应衰减速率对控制器性能的影响。

## 致 谢

衷心感谢加州理工大学 Adam Wierman 教授和卡耐基梅隆大学屈冠南助理教授。在疫情形式严峻的 2021 年，他们热情地接纳我远程加入他们的课题组，并尽心尽责地指导了我的春研和暑研项目，带领我窥见了学术研究的冰山一角。在刚刚结束的申请季中，两位教授在文书写作、导师选择等方面也为我提供了许多有益的建议，在确定录取结果前帮助我取得了这两所学校的 offer，同时也尊重并理解我的最终选择。可以说，没有他们的鼓励、引导、帮助和理解，我的科研和升学之路一定会增添不少坎坷，在此向他们表示最诚挚的感谢！

感谢加州理工大学博士生林一衡、石冠亚学长在合作研究期间对我的关心和帮助，他们乐于与我进行学术讨论并回答我提出的各种问题，无论这些问题是否显得浅显幼稚；在研究遇到瓶颈时，我们也总能相互鼓励、集思广益，最终一起克服困难。正因为有他们的支持，我的首次科研与投稿才能顺利完成。

感谢交叉信息研究院张崇洁助理教授允许我从本科二年级起列席组会，并一路支持我完成了科研的初体验。感谢 2021 届硕士研究生王同翰学长在多智能体强化学习方面向我传授的经验和提供的帮助。虽然最终因为各种原因我没有选择这一研究方向，但他们的言传身教使我受益良多。

感谢交叉信息研究院黄隆波副教授在本科毕设期间对我的关心和帮助。

感谢班主任于洋老师本科四年对我生活、学习的全方位关心。虽然我们有时意见相左，但于老师总能大度容人，并始终坦诚地向我提出他的建议和意见。

感谢紫荆二号楼 219B 寝室何中天、赵赫扬、周润龙三位室友在宿舍生活中对我的关照。感谢张千帆、韩贝宁、肖光烜同学在健身房一同度过的快乐时光。感谢计科 80 所有同学四年来同甘共苦的陪伴。

感谢“毕设快乐车”群友在毕设期间对我的精神支持，是他们向我打开了 CS:GO 这款游戏的大门，给忙碌的本科学习生活增添了一抹亮色。还要感谢他们大度地包容我在游戏中的菜鸟枪法、神游意识和老六本性。

最后，感谢父母二十三年来的养育之恩，他们总是在我遇到困难时充当我最坚实的后盾。没有他们的付出，也就不可能有今天的我。

最后的最后，我想引用英国前首相 Winston Churchill 的一句名言——同时也是我脑海中历久弥新的一句话——作为整篇论文的结束语。

*Now this is not the end.*

*It is not even the beginning of the end.*

*But it is, perhaps, the end of the beginning.*

— Sir Winston Churchill

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 胡扬 日 期： 2022.5.31





## 在学期间参加课题的研究成果

### 个人简历

1999年11月16日出生于上海市杨浦区。初中就读于上海兰生复旦中学（2011年9月至2015年6月），高中就读于复旦大学附属中学（2015年9月至2018年6月）。曾获全国高中数学联合竞赛一等奖、全国青少年信息学奥林匹克联赛（NOIP）提高组一等奖、全国中学生物理竞赛二等奖等奖项。

2018年9月考入清华大学交叉信息研究院，就读于计算机科学与技术（计算机科学实验班）专业，攻读工学学士学位。曾获国家奖学金两次，蒋南翔奖学金（校级）一次，新生二等奖学金（校级）一次，“姚奖学金”银奖（院级）一次。

### 在学期间完成的相关学术成果

#### 学术论文：

- [1] LIN Y\*, HU Y\*, SHI G\*, SUN H\*, QU G, WIERMAN A. Perturbation-based Regret Analysis of Predictive Control in Linear Time Varying Systems[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2021, 34, 5174–5185.
- [2] HU Y, ZHU Z, SONG S, LIU X, YU Y. Calculus of Consent via MARL: Legitimizing the Collaborative Governance Supplying Public Goods[DB/OL]. *arXiv preprint arXiv: 2111.10627*, 2021.（已被 NeurIPS 2021 PERLS Workshop 录用）
- [3] HU Y, Wierman A, QU G. On the Sample Complexity of Stabilizing LTI Systems[J]. *In press*.（NeurIPS 2022 在投）
- [4] LIN Y\*, HU Y\*, QU G, LI T, WIERMAN A. Bounded-Regret MPC via Perturbation Analysis: Prediction Error, Constraints, and Nonlinearity[J]. *In press*.（NeurIPS 2022 在投）



综合论文训练记录表

学生姓名	胡 扬	学号	2018011424	班级	计科81
论文题目	模型预测控制在模型含误差时的性能分析				
主要内容以及进度安排	<p style="text-align: center;">—— 基于微扰法的分析框架</p> <p>中期前已完成的内容:</p> <p>(1) 阅读相关文献资料, 完成文献综述和文献翻译.</p> <p>(2) 确定所研究的问题包括预测含误差和约束集两方面.</p> <p>(3) 对于预测含误差的系统, 建立了一个统一的分析框架, 对系统噪声的误差已有较完善的分析, 对动力学方程含误差的分析尚有技术上的困难需要解决.</p> <p>(4) 对于约束集, 提出了几种可行的技术路线, 并初步完成其中一种的尝试, 取得了一些结果.</p> <p>中期后的进度安排:</p> <p>(1) 对当前结果中的未尽事宜作进一步研究.</p> <p>(2) 如时间允许, 进行一些数值实验, 对理论进行检验.</p> <p>(3) 完成论文的撰写工作.</p> <p style="text-align: right;">指导教师签字: <u>张岩浩</u></p> <p style="text-align: right;">考核组组长签字: _____</p> <p style="text-align: right;">年    月    日</p>				
	中期考核意见	<p>内容翔实, 进展顺利, 考核合格。</p> <p style="text-align: right;">考核组组长签字: <u>张岩浩</u></p> <p style="text-align: right;">2022 年 5 月 1 日</p>			

<p style="text-align: center;">指导教师评语</p>	<p>该生在综合论文训练中态度认真，表现积极。该项目在选题上较好结合了当前研究热点。研究过程中，该生能合理安排时间，按计划完成了开题报告、文献翻译、方法试验、论文写作各环节任务，达到了工作量要求；同时表现出较强的文献调研能力、问题分析能力和理论推导能力。报告中文献翻译部分语句通顺、翻译基本准确；毕业论文主体脉络清晰、内容完整、表意流畅、绘图精美，较好地归纳了主要研究成果，整体符合要求。</p> <p style="text-align: right;">指导教师签字： <u>黄隆波</u></p> <p style="text-align: right;">2022年 5 月 31 日</p>
<p style="text-align: center;">评阅教师评语</p>	<p>一个系统、完整的可发表研究。</p> <p style="text-align: right;">评阅教师签字： <u>于洋</u></p> <p style="text-align: right;">2022年 6 月 6 日</p>
<p style="text-align: center;">答辩小组评语</p>	<p>本文研究了模型预测控制问题，给出了新的理论结果，达到了本科毕业论文水平。</p> <p style="text-align: right;">答辩小组组长签字： <u>甄丝</u></p> <p style="text-align: right;">2022年 6 月 6 日</p>

总成绩： A+

教学负责人签字： 姚期智

2022年 6 月 9 日